

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

# الرِّياضيَّات



السنة التاسعة من التعليم الأساسي

المعهد التربوي الوطني - الجزائر







الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

# الرِّيَاضِيَّات

السنة التاسعة من التعليم الأساسي

المؤلفون

زهية فارسي - مفتشة التربية والتكوين

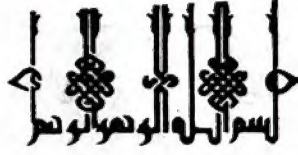
إبراهيم العسل ، الطاهر عمور ، مقتدر زروقي- أساتذة



المعهد التربوي الوطني - الجزائر







هذا الكتاب هو الثالث من سلسلة كتب الرياضيات للطور الثالث من التعليم الأساسي ، وهو موجه بالدرجة الأولى إلى تلميذ السنة التاسعة التي هي تتويج لسنوات التعليم الأساسي .

لقد راعينا في هذا الكتاب نفس منهجية الكتاتين السابقين حيث قدمنا الخواص والنظريات على شكل مسائل تعتمد على التحليل والتركيب ، وتثير حوافز التلميذ للبحث والاكتشاف ، كما أدرجنا في نهاية جل الدروس مسائل محلولة تعين التلميذ على التدريب في حل التمارين والمسائل ، وتكون منوالاً لتوظيف المفاهيم المكتسبة في الدرس ، ونرى أن تلك المنهجية تمكن التلميذ من استيعاب المفاهيم واستخلاص النتائج والقيام بالتطبيقات .

وقد زوّدنا الكتاب ببعض الصفحات الخاصة التي تنمي عند التلميذ الجانب الثقافي وتطلعه على بعض علماء الرياضيات ، ومساهمة الرياضيين المسلمين في هذا الميدان .

أملنا كبير في إثراء هذا الكتاب بملاحظات واقتراحات المربين حتى نساهم جميعاً في تطوير الكتاب المدرسي في بلادنا .

والله ولي التوفيق .

المؤلفون

# 1

## مجموعات الأعداد :مراجعة وتتمات

### 1. مجموعات الأعداد :

سبق لك أن تعرفت على المجموعات العددية الآتية :

(1) مجموعة الأعداد الطبيعية  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$   
 المجموعة  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  هي مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة .

### (2) مجموعة الأعداد الصحيحة

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$   
 •  $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$  هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير المعدومة .  
 •  $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو المعدومة  
 •  $\mathbb{Z}^- = \{0, -1, -2, -3, \dots\}$  هي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة أو المعدومة .

(3) مجموعة الأعداد الناطقة  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$$

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$\mathbb{Q}^- = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}^-, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$



- أكمل بأحد الرمزین  $\neq, \equiv$  :

$$5...ط ؛ 0...ط* ؛ 0...≤ ؛ \pi...ص ؛ \frac{3}{2}...ص ؛$$

$$\frac{1988}{100}...≤ ؛ \frac{1}{2}...ط ؛ -1,99...ص- ؛ -3...≤- ؛$$

$$0...ص ؛ -5...ط ؛ 1408...ط ؛ +5...ص+ ؛ \frac{1}{2}...≤- ؛$$

$$-19,88...≤ ؛ +3,5...ص+ ؛ -2...ص- .$$

ملاحظات :

• كل من المجموعات المذكورة هي مجموعة غير منتهية .

$$• ط = ص+ .$$

$$• ط \supset ص \supset ≤ .$$

•  $ع \supset ≤$  ( ع هي مجموعة الأعداد العشرية ) .

(1) اكتب كلاً من المجموعتين الآتيتين بإعطاء خاصية مميزة لكل منها :

$$ن = \{0, 2, 4, 6, \dots\} ؛ ف = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} .$$

(2) عيّن كلاً من المجموعات الآتية :

$$ص+ \cup ص- ؛ ص+ \cap ص- ، ≤+ \cup ≤- ، ≤+ \cap ≤- ، ط \cap ص \cap ≤$$

## 2. مضاعفات وقواسم عدد طبيعي :

(1) تذكر أنه :

• إذا كان  $a$  عددًا طبيعيًا فإن المجموعة :

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, a, \dots\} \text{ حيث } a \in \mathbb{N},$$

هي مجموعة مضاعفات  $a$ .

مثال :

نعلم أن  $5 \times 7 = 35$  فالعدد 35 هو مضاعف لكل من 5 و 7.

لدينا  $M_5 = \{0, 5, 10, 15, \dots, 5a, \dots\}$  هي مجموعة مضاعفات 5.

$$M_7 = \{0, 7, 14, 21, \dots, 7a, \dots\}$$

• وإذا كان  $a$  مضاعفًا للعدد  $b$  أي  $a = b \times c$  (حيث  $c \in \mathbb{N}$ ). فإن  $b$  هو

قاسم للعدد  $a$ .

نقول إن  $c$  هو حاصل القسمة التامة للعدد  $a$  على العدد  $b$ .

ملاحظة :

★ الصفر مضاعف لكل عدد طبيعي.

★ الصفر ليس قاسمًا لأي عدد طبيعي.

• إذا لم يكن العدد الطبيعي  $a$  مضاعفًا للعدد الطبيعي غير المعدوم  $b$  فإن :

(1) حاصل قسمة  $a$  على  $b$  ليس عددًا طبيعيًا.

(2) يمكن حصر العدد  $a$  بين مضاعفين متتاليين للعدد  $b$  ، أي يمكن أن

نجد عددًا طبيعيًا  $c$  بحيث يكون :

$$b \times c < a < b \times (c+1)$$

} و

$$a = b \times c + r \quad (0 < r < b)$$

العدد  $c$  هو حاصل قسمة  $a$  على  $b$  المقرب إلى الوحدة والعدد  $r$  هو باقي القسمة.



مثال :

العدد 34 ليس مضاعفاً للعدد 7 ، أي 7 ليس قاسماً للعدد 34 .

لكن 34 محصور بين المضاعفين المتتاليين 28 و 35 للعدد 7 .

$$35 > 34 > 28 \quad \text{أي}$$

$$5 \times 7 > 34 > 4 \times 7$$

$$6 + 4 \times 7 = 34 \quad (7 > 6 > 0)$$

العدد 4 هو حاصل القسمة المقرب إلى الوحدة للعدد 34 على 7 ، 6 هو باقي القسمة .

(2) اذكر كلاً من قاعدتي إيجاد :

(1) المضاعف المشترك الأصغر لعددتين طبيعيتين .

(2) القاسم المشترك الأكبر لعددتين طبيعيتين .

مثال 1 :  $640 = f$  ،  $700 = b$  .

لنحسب م م أ (f ، b) ، ق م أ (f ، b) .

- نحلل f و b إلى جُداء عوامل أولية فنجد :

$$f = 5 \times 7^2 = b \text{ و } b = 7 \times 2^5 \times 5^2$$

$$22400 = 7 \times 25 \times 128 = 7 \times 2^5 \times 7^2 = \text{م م أ (f ، b)}$$

$$\text{و ق م أ (f ، b)} = 5 \times 4 = 5 \times 2^2 = 20$$

ملاحظة :

إذا كان f و b عددين أوليين فيما بينهما فإن :

$$\text{ق م أ (f ، b)} = 1 \text{ و } \text{م م أ (f ، b)} = f \times b$$

## مثال 2 :

$$5 \times 3 = 15$$

$$2^3 = 8$$

لاحظ أن 15 و 8 أوليان فيما بينهما

إذن ق م أ (15 ، 8) = 1 و م م أ (15 ، 8) =  $8 \times 15 = 120$  .

(1) عيّن م م أ (18 ، 48) ثم ق م أ (18 ، 48) .

(2) ما هو م م أ (18 ، 48 ، 72) ؟ وما هو ق م أ (18 ، 48 ، 72) ؟

(3) اختزل كلاً من الكسور الآتية :

$$\frac{85}{15} ، \frac{72}{18} ، \frac{36}{48}$$

(4) وخذ مقامات الكسور الآتية :

$$\frac{26}{45} ، \frac{10}{7} ، \frac{11}{9} ، \frac{3}{7} ، \frac{1}{2}$$

## 3. إشارة عدد ناطق وقيمته المطلقة :

$$\frac{f}{b} = s$$

- يكون العدد س موجباً إذا كان العددان الصحيحان f ، b من نفس الإشارة .

$$\frac{|f|}{|b|} + = s$$

- ويكون س سالباً إذا كان العددان الصحيحان من إشارتين مختلفتين .

$$\frac{|f|}{|b|} - = s$$



$$\begin{aligned} \text{مثال : } \frac{2}{3} + &= \frac{|2-|}{|3-|} + = \frac{2-}{3-} \\ \frac{5}{6} - &= \frac{|5-|}{|6+|} - = \frac{5-}{6+} \end{aligned}$$

القيمة المطلقة لعدد ناطق :  
• س عدد ناطق .

$$\begin{aligned} |س| &= |س +| \text{ إذا كان س موجباً} \\ |س| &= |س -| \text{ إذا كان س سالباً} \end{aligned}$$

• مهما يكن العدد الناطق س فإن :  
 $|س| = |-س|$

القيمة المطلقة لعدد ناطق هي عدد ناطق موجب .

$$\begin{aligned} \text{مثال : } \frac{3}{7} &= \left| \frac{3}{7} + \right| = \left| \frac{3-}{7-} \right| \\ \frac{5}{2} &= \left| \frac{5}{2} - \right| = \left| \frac{5-}{2+} \right| \end{aligned}$$

(1) عَيِّن الإشارة والقيمة المطلقة لكل من الأعداد الناطقة الآتية :

$$\frac{213+}{10-} ; \frac{28-}{7-} ; \frac{9+}{15+} ; \frac{23-}{9+}$$

(2) عَيِّن العدد الناطق س بحيث :

$$3 = |س -| ; \frac{5-}{6-} = |س| ; \frac{3}{2} = |س|$$

(3) عَيِّن كلاً من :

$$|5-| ; |2,5+| ; |2,5-| ; \left| \frac{3+}{5-} \right| ; \left| \frac{3-}{5+} \right| ; \left| \frac{3}{5} - \right|$$

#### 4. تساوي عددين ناطقين :

تذكر أنه :

مهما يكن العدد الناطق  $\frac{1}{b}$  ومهما يكن العدد الصحيح غير المعدوم  $a$  ، فإن :

$$\begin{array}{ccc} \frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{b \times 1} & \frac{a}{b} = \frac{a}{b} & \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \end{array}$$

ملاحظة :

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \text{ معناه } a = a \text{ و } b = b$$

(1) اعط ثلاثة كسور تُمثل العدد الناطق  $\frac{2}{5}$ .

(2) عَيِّن الأعداد الناطقة المتساوية من بين الأعداد الناطقة الآتية :

$$\frac{270}{360} - \frac{20}{24} - \frac{24}{32} - \frac{3}{4}$$

#### 5. خواص الجمع في $\mathbb{Q}$ .

• مجموع عددين ناطقين من نفس الإشارة هو عدد ناطق :

– له نفس الإشارة

– وقيمتها المطلقة هي مجموع قيمتيهما المطلقتين.

مثال :

$$\frac{5}{2} = \frac{20}{8} + \frac{7+13}{8} = \left( \frac{7}{8} + \right) + \left( \frac{13}{8} + \right)$$

$$\frac{1203}{85} = \frac{3609}{255} - \frac{2244 - 1365}{255} = \left( \frac{132}{15} - \right) + \left( \frac{91}{17} - \right)$$

• مجموع عددين ناطقين مختلفين في الإشارة هو عدد ناطق :  
 - إشارته هي إشارة أكبرهما بالقيمة المطلقة .  
 - وقيمته المطلقة هي فرق قيمتيهما المطلقتين .

مثال :

$$10 + = \frac{280}{28} + = \frac{37 - 317}{28} = \left( \frac{37}{28} - \right) + \left( \frac{317}{28} + \right)$$

$$\frac{67}{28} - = \frac{88 - 21}{28} = \left( \frac{22}{7} - \right) + \left( \frac{3}{4} + \right)$$

إذا كان س ، ع عددين ناطقين حيث |س| < |ع| فإن إشارة المجموع س + ع تكون كما في الجدول الآتي :

-	+	-	+	إشارة س
+	-	-	+	إشارة ع
-	+	-	+	إشارة س + ع

• مهما يكن العدداً الناطقان  $s$ ،  $e$  فإن :

$$s + e = e + s$$

• مهما تكن الأعداد الناطقة  $s$ ،  $e$ ،  $v$  فإن :

$$(s + e) + v = v + (s + e).$$

• مهما يكن العدد الناطق  $s$  فإن :  $s + 0 = 0 + s = s$

• مهما يكن العدد الناطق  $s$  فإن :  $s + (-s) = (-s) + s = 0$ .

-  $s$  هو معاكس  $s$ .

• مهما تكن الأعداد الناطقة  $s$ ،  $e$ ،  $v$  فإن :

$$s = e \text{ معناه } s + v = e + v$$

•  $-(s + e) = (-s) + (-e)$  أي أن معاكس مجموع عددين ناطقين يساوي مجموع معاكسيهما.

### 6 خواص الطرح في $\mathbb{S}$ :

$$e + f = f + e \text{ معناه } f - s = s - e.$$

$$f \text{ هو فرق العددين } s, e.$$

• مهما يكن العدداً الناطقان  $s$ ،  $e$  فإن :

$$s - e = e + (-s).$$

$s - e = -e + s$  أي أن  $(s - e)$  هو معاكس  $(e - s)$ .

• مهما يكن العدد الناطق  $s$  فإن :

$$s - 0 = s$$

$$0 - s = -s$$

• مهما تكن الأعداد الناطقة  $s$ ،  $e$ ،  $v$  فإن .

$$s = e \text{ معناه } s - v = e - v.$$

$$s - e = (s + v) - (e + v)$$



## قاعدة حذف أو وضع الأقواس :

$$\begin{aligned} & \text{أ، ب، ج أعداد ناطقة :} \\ & \text{ج} - \text{ب} + \text{أ} = \text{ج} - (\text{ب} + \text{أ}) = (\text{ج} - \text{ب}) + \text{أ} \\ & \text{ج} - \text{ب} - \text{أ} = \text{ج} - (\text{ب} - \text{أ}) = (\text{ج} + \text{ب}) - \text{أ} \\ & \text{ج} + \text{ب} - \text{أ} = \text{ج} + (\text{ب} - \text{أ}) = (\text{ج} - \text{ب}) - \text{أ} \end{aligned}$$

أمثلة :

$$\frac{7}{6} - \left( \frac{3}{2} + \frac{5}{4} \right) = \left( \frac{7}{6} - \frac{3}{2} \right) + \frac{5}{4} \cdot$$

$$\frac{3}{7} - \left( 5 - \frac{13}{6} \right) = \left( \frac{3}{7} + 5 \right) - \frac{13}{6} \cdot$$

$$\frac{3}{2} + \left( \frac{9}{10} - \frac{7}{8} \right) = \left( \frac{3}{2} - \frac{9}{10} \right) - \frac{7}{8} \cdot$$

احسب كلاً مما يلي :

$$(1) \quad \frac{15}{7} - \frac{45}{35} - \frac{31}{12} - 15 ; \quad \frac{13}{20} + \frac{17}{25}$$

$$(2) \quad \frac{12}{5} - \frac{24}{18} - \frac{45}{6} ; \quad 19 - \frac{3}{4} + 7 ; \quad 3 + \frac{8}{14} - \frac{12}{15}$$

(3) احسب بطريقتين كلاً مما يلي :

$$; \quad \left( \frac{3}{14} + \frac{5}{7} - \right) - 9 ; \quad \left( \frac{3}{5} + \frac{14}{20} - \right) - \frac{6}{4}$$

$$\left( \frac{6}{10} - \frac{8}{2} + \frac{6}{5} \right) + \left( \frac{7}{4} - \frac{3}{2} \right)$$

## 7. خواص الضرب في $\mathbb{S}$ :

• جداء عددين ناطقين :

جداء عددين ناطقين لهما نفس الإشارة هو عدد ناطق موجب ، قيمته المطلقة هي جداء قيمتيهما المطلقتين .

$$\text{مثال : } 12 + = \frac{10 \times 18}{3 \times 5} + = \left( \frac{10}{3} + \right) \times \left( \frac{18}{5} + \right)$$

$$\cdot \frac{15}{14} + = \frac{5 \times 3}{7 \times 2} + = \left( \frac{5}{7} - \right) \times \left( \frac{3}{2} - \right)$$

• جداء عددين ناطقين مختلفين في الإشارة هو عدد ناطق سالب ، قيمته المطلقة هي جداء قيمتيهما المطلقتين .

$$\cdot \frac{21}{40} - = \frac{3 \times 7}{8 \times 5} - = \left( \frac{3}{8} + \right) \times \left( \frac{7}{5} - \right) \quad \text{مثال :}$$

$$\cdot \frac{9}{19} - = \frac{18}{38} - = \frac{2 \times 9}{19 \times 2} - = \left( \frac{2}{19} - \right) \times \left( \frac{9}{2} + \right)$$

• إشارة جداء عددين ناطقين :

س ، ع عددان ناطقان لدينا :

-	+	-	+	إشارة س
+	-	-	+	إشارة ع
-	-	+	+	إشارة س × ع

• القيمة المطلقة لجداء عددين ناطقين :

مهما يكن العددين الناطقان س ، ع فإن :  
 $|س \times ع| = |س| \times |ع|$

خواص :

(1) الضرب في  $\leq$  تبديلي

أي مهما يكن العددين الناطقان س ، ع فإن :

$$س \times ع = ع \times س$$

مثال :  $(3+) \times \left(\frac{5}{4}-\right) = \left(\frac{5}{4}-\right) \times (3+)$   
 $\frac{15}{4}- = (3+) \times \left(\frac{5}{4}-\right)$

(2) الضرب في  $\leq$  تجميعي

أي مهما تكن الأعداد الناطقة س ، ع ، ص فإن :

$$(س \times ع) \times ص = ص \times (س \times ع)$$

مثال :  $(6-) \times \left[7 \times \left(\frac{3}{2}+\right)\right] = \left[(6-) \times 7\right] \times \left(\frac{3}{2}+\right)$   
 $63-- = (42-) \times \left(\frac{3}{2}+\right)$

$$(6-) \times \left[7 \times \left(\frac{3}{2}+\right)\right] = (6-) \times \left[7 \times \left(\frac{3}{2}+\right)\right]$$

$$(6-) \times \left[7 \times \left(\frac{3}{2}+\right)\right] = \left[(6-) \times 7\right] \times \left(\frac{3}{2}+\right)$$
 إذن

(3) العدد الناطق 1 هو العنصر الحيادي بالنسبة إلى الضرب في  $\leq$

أي مهما يكن العدد الناطق س فإن :

$$س \times 1 = 1 \times س = س$$

4) لكل عدد ناطق غير معدوم س نظير بالنسبة للضرب في  $\leq$  أي مها يكن العدد الناطق غير المعدوم س فإنه يوجد عدد ناطق غير معدوم س' بحيث :

$$1 = س \times س' = س' \times س$$

$$س' \text{ يسمى مقلوب س ونكتب : } \frac{1}{س} = س'$$

5) مها يكن العدد الناطق س فإن :

$$س - = (1 -) \times س$$

$$\text{مثال : } \left( \frac{3}{2} + \right) = (1 -) \times \left( \frac{3}{2} - \right)$$

$$. (5 -) = (1 -) \times (5 +)$$

6) توزيع الضرب بالنسبة إلى الجمع وإلى الطرح في  $\leq$  أي مها تكن الأعداد الناطقة س ، ع ، ص فإن :

$$س \times (ع + ص) = س \times ع + س \times ص$$

$$س \times (ع - ص) = س \times ع - س \times ص$$

مثال :

$$\frac{117}{14} = \frac{12+105}{14} = \frac{12}{14} + \frac{15}{2} = \left( \frac{4}{7} \times \frac{3}{2} \right) + \left( 5 \times \frac{3}{2} \right) = \left( \frac{4}{7} + 5 \right) \frac{3}{2} =$$

$$\left( \frac{3}{4} + \right) \times \left( \frac{1}{2} - \right) - \left( \frac{5}{7} + \right) \times \left( \frac{1}{2} - \right) = \left[ \left( \frac{3}{4} + \right) - \left( \frac{5}{7} + \right) \right] \times \left( \frac{1}{2} - \right) =$$

$$. \frac{1}{56} = \frac{21+20-}{56} = \left( \frac{3}{8} - \right) - \left( \frac{5}{14} - \right) =$$



احسب بطريقتين كلاهما يلي:

$$\frac{45-}{36} \times 8 \times \frac{24}{5-} ; \left( \frac{18}{15-} \right) \times \left( \frac{45-}{16} \right) \times \left( \frac{13}{4-} \right)$$

$$\frac{7}{15} \times \frac{18-}{5} \times \frac{25}{6-}$$

$$\left( \frac{27}{48} - \frac{15}{12} \right) \frac{4}{5} ; \left( \frac{5}{39-} + \frac{10-}{26} \right) \frac{13}{6}$$

$$\left( \frac{5}{4-} + \frac{14-}{8} \right) \left( 2 - \frac{7}{5-} \right)$$

8. قوة عدد ناطق وخواصها :

من عدد ناطق ،  $\frac{a}{b}$  عدد طبيعي غير معدوم .  
 • الجداء من  $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \dots \times \frac{m}{n}$  يسمى القوة النونية للعدد الناطق  $\frac{a}{b}$  عاملاً

من ونرمز إليه بالرمز  $\frac{a}{b}$  .

ونكتب :  $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \dots \times \frac{m}{n}$  عاملاً

$$\frac{2!}{2!} = \frac{1}{1} ; \frac{3!}{3!} = \frac{1}{1} ; \frac{2!}{2!} = \frac{1}{1} ; \frac{2!}{2!} = \frac{1}{1} ; \frac{2!}{2!} = \frac{1}{1}$$

أمثلة :

$$.9+ = (3-)\times(3-)=^2(3-)$$

$$\frac{625+}{2401} = \frac{^4(5-)}{^47} = ^4\left(\frac{5-}{7}\right) = ^4\left(\frac{5}{7}-\right)$$

$$\frac{216}{512} = \frac{^3(6+)}{^38} = ^3\left(\frac{6+}{8}\right) = ^3\left(\frac{6}{8}+\right)$$

• د ، ه عددان صحيحان :

- مهما يكن العدد الناطق غير المعلوم س فإن :

$$(1) \quad ^d(س) = س \cdot د$$

$$(2) \quad س \cdot د = س \times د$$

- مهما يكن العددان الناطقان غير المعلومين س و ع فإن :

$$(س \cdot ع) = س \cdot ع$$

أمثلة :

$$^{6-}\left(\frac{2}{5}-\right) = ^{(2-)}^3\left(\frac{2}{5}-\right) = ^{2-}\left[^3\left(\frac{2}{5}-\right)\right]$$

$$^{(4+)+(3-)}\left(\frac{2}{7}-\right) = ^{4+}\left(\frac{2}{7}-\right) \times ^{3-}\left(\frac{2}{7}-\right)$$

$$, \frac{2}{7}- = ^{1+}\left(\frac{2}{7}-\right) =$$

$$^3\left(\frac{5}{6}-\right) \times ^3\left(\frac{4}{7}\right) = ^3\left[\left(\frac{5}{6}-\right) \times \frac{4}{7}\right]$$

احسب كلاً من الأعداد الآتية :

$$\begin{aligned} & {}^3\left(\frac{1-}{2}\right) \quad ; \quad {}^2\left(\frac{2-}{7-}\right) \quad ; \quad {}^2\left(\frac{4-}{5}\right) \quad ; \quad {}^2\left(\frac{1-}{3-}\right) \\ & \quad ; \quad {}^3\left(\frac{15}{12} \times \frac{4}{3}\right) \quad ; \quad {}^{3-}\left(\frac{2}{3}\right) \times {}^2\left(\frac{2}{3}\right) \\ & \quad ; \quad {}^2\left[{}^{3-}\left(\frac{5-}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

### 9. حاصل قسمة عدد ناطق على آخر

• حاصل قسمة عدد ناطق س على عدد ناطق غير معدوم ع هو العدد الناطق الوحيد ح ، حيث  $س = ح \times ع$  .

نكتب :  $ح = س \div ع$  أو  $ح = \frac{س}{ع}$  .

$\frac{س}{ع} = ح$	معناه	$س = ح \times ع$
-------------------	-------	------------------

تذكر أن :  $\frac{1}{\frac{ح}{س}} = \frac{س}{ح}$  ، عددان ناطقان غير معدومين .

$$\bullet : \frac{1}{\frac{ح}{س}} = \frac{س}{ح} \times \frac{1}{1} = \frac{س}{ح} = \frac{1}{\frac{ح}{س}} \div \frac{1}{1}$$

$$\left( \frac{1}{5} \text{ هو مقلوب } \frac{5}{1} \right) \frac{5}{1} = \frac{5}{1} \times 1 = \frac{5}{1}.$$

• عدد صحيح غير معلوم  $\frac{1}{5} \div \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{5} = 1$

**أمثلة :**

$$\frac{5}{14} = \frac{4 \times 15}{21 \times 8} = \frac{4}{21} \times \frac{15}{8} = \frac{21}{4} \div \frac{15}{8} \quad (1)$$

$$\frac{11}{14} = \frac{11}{14} \times 1 = \frac{1}{\frac{14}{11}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{100} = \frac{3}{300} = \frac{1}{75} \times \frac{3}{4} = 75 \div \left( \frac{3}{4} \right) \quad (3)$$

$$\frac{7}{2} - \frac{21}{6} = \frac{7}{6} \times (3 - ) = \left( \frac{6}{7} \right) \div (3 - ) \quad (4)$$

• س عدد ناطق غير معدوم، و ه عددان صحيحان :

$$s - s_0 = \frac{s_0}{s_1}$$

ملاحظة :  $\frac{1}{s-s_0}$



مقلوب  $10^2$  هو  $\frac{1}{10^2}$  و  $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$ .

$$(10^{-1} \times 25) \times (3 \times 10^{-3}) = 2,5 \times 0,003 = 0,0075$$

$$0,0075 = 75 \times 10^{-4} = (75 \times 10^{-3} \times 10^{-1}) \times (25 \times 3) = 10^{-1} \times 10^{-3} \times 25 \times 3 = 10^{-4} \times 75$$

$$(5 \times 3 \times 71) = 5 \times 10^{-3} \times 3 \times 10^{-1} \times 71 \times 10^{-2} = 1065 \times 10^{-6}$$

$$(10^{-3} \times 10^{-1} \times 10^{-2} \times 1065) = 1065 \times 10^{-6}$$

$$0,001065 = 1065 \times 10^{-6}$$

احسب كلا مما يلي :

$$\left( \frac{16}{15} \right) \div (-4) ; \left( \frac{2}{3} \right) \div (-23) ; \frac{7}{9} \div \frac{35}{18}$$

$$\frac{45}{21} \div \frac{48}{14} ; \left( \frac{27}{6} \right) \div 1$$

$$3 - \left( \frac{9}{5} \right) ; \frac{7}{2} \div \left( \frac{7}{2} \right) ; 4 - \left( \frac{3}{5} \right) \div 7 - \left( \frac{3}{5} \right)$$

$$10^2 \times 9 \times 10^{-3} \times 8 ; 10^{-2} \times 15 \times 10^{-3} \times (7 -)$$

$$10^{-2} \times 17 - 10^{-4} \times 15$$

## 10. الترتيب في $\mathbb{R}$ :

• س ، ع ، ص أعداد ناطقة .

تذكر أن :

$$\begin{aligned} & \text{و } \begin{cases} \text{س} \leq \text{ع} \text{ معناه } (\text{س} - \text{ع}) \leq 0 \\ \text{س} \geq \text{ع} \text{ معناه } (\text{س} - \text{ع}) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

مثلا :

$$(5-) \geq (3-) \text{ معناه } (3-) - (5-) \geq 0 .$$

$$(7+) \leq (2-) \text{ معناه } (2-) - (7+) \leq 0 .$$

$$\text{س} \geq \text{ص} \text{ معناه } \text{س} + \text{ع} \geq \text{ص} + \text{ع} .$$

$$\bullet \text{ إذا كان } \text{س} \geq \text{ع} \text{ و } \text{ص} < 0 \text{ فإن } \text{س} \times \text{ص} \leq \text{ع} \times \text{ص} .$$

$$\bullet \text{ إذا كان } \text{س} \geq \text{ع} \text{ و } \text{ص} > 0 \text{ فإن } \text{س} \times \text{ص} \geq \text{ع} \times \text{ص} .$$

$$\text{لدينا } (8-) \geq (3-) \text{ إذن } (3-) + (2-) \geq (8-) + (2-) .$$

$$\text{لدينا } (6-) \geq (4-) \text{ إذن } (4-) + (2-) \leq (6-) + (2-) .$$

$$\bullet \left(\frac{1}{2}+\right) \times (3-) \leq \left(\frac{1}{2}+\right) \times (7+) \text{ إذن } (3-) \leq (7+) .$$

س ، ع عددان ناطقان :

بين أنه إذا كان :

$$(1) \text{ س} + \frac{3}{2} \geq \text{ع} + 2 \text{ فإن } \text{س} - \frac{1}{2} \geq \text{ع} .$$

$$(2) \text{ س} - 3 \leq \text{ع} + 2 \text{ فإن } \text{س} - 5 \leq \text{ع} + 1 .$$

$$(3) \text{ س} - 3 \leq \text{ع} + 6 \text{ فإن } \text{س} - \frac{2}{3} \leq \text{ع} + 2 .$$

$$(4) \text{ س} - 5 \geq \text{ع} + 3 \text{ فإن } \text{س} - \frac{3}{5} \geq \text{ع} + 3 .$$

## 11. حاصل القسمة المقرب والنشر العشري :

- يمكن إعطاء حاصل قسمة عدد ناطق س على عدد ناطق غير معدوم ع بتقريب عشري .

مثال : لنحسب  $\frac{259}{15}$  بتقريب عشري .

$$\begin{array}{r} 259 \quad | \quad 15 \\ 109 \quad | \quad 17,266 \\ 40 \\ 100 \\ 100 \\ 10 \end{array}$$

لاحظ أن :

$$18 \times 15 > 259 > 17 \times 15$$

$$18 > \frac{259}{15} > 17$$

فالعدد 17 هو حاصل القسمة المقرب بالتقصان إلى الوحدة للعدد 259 على 15 .

$$17,3 > \frac{259}{15} > 17,2 \quad \text{لدينا أيضًا :}$$

نقول إن 17,2 هو حاصل القسمة المقرب بالتقصان إلى  $\frac{1}{10}$  للعدد 259 على 15 .

$$17,27 > \frac{259}{15} > 17,26 \quad \text{ولدينا أيضًا :}$$

فالعدد 17,26 هو حاصل القسمة المقرب بالتقصان إلى  $\frac{1}{210}$  للعدد 259 على 15 .

$$17,267 > \frac{259}{15} > 17,266 \text{ أيضا :}$$

فالعدد 17,266 هو حاصل القسمة المقرب بالتقصان إلى  $\frac{1}{310}$  للعدد 259

على 15 .

• إذا واصلنا عملية القسمة فإن الباقي دائما غير معدوم .

ونلاحظ أن الرقم 6 يتكرر ابتداء من المرتبة الثانية بعد الفاصلة .

نقول إن الكتابة  $17,266\bar{6}$  هي نشر عشري غير محدود دوري ، دوره العدد 6 .

$$17,26\bar{6} \dots = \frac{259}{15} \text{ ونكتب :}$$

نكتب أيضا  $17 \simeq \frac{259}{15}$  ونقرأ حاصل قسمة العدد 259 على 15 يساوي تقريبا

17 .

$$1,257\bar{57} \dots = \frac{83}{66} \text{ مثال 2 :}$$

الكتابة  $1,257\bar{57} \dots$  هي نشر عشري غير محدود دوري للعدد الناطق  $\frac{83}{66}$

ودوره 57 .

نتيجة : كل عدد ناطق يُمثل بنشر عشري غير محدود دوري

مثال 3 : لنحسب حاصل قسمة العدد 7 على 5 .



$$\frac{7}{5} \text{ العدد } \frac{7}{5} \text{ هو عدد عشري لأن } 1,4 = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

نكتب أيضا :  $1,4000 = 1,400 = 1,40 = 1,4$  .

الكتابة  $1,400\dots$  هي نشر عشري غير محدود دوري دوره 0 للعدد العشري  $\frac{7}{5}$  .

بصفة عامة : كل عدد ناطق عشري يُمثل بنشر عشري غير محدود دوري بدوره العدد 0 .

مثال 4 :

لاحظ أن  $\frac{13}{25}$  هو عدد عشري

وأن  $0,52 = \frac{13}{25}$  .

يمكن أن نكتب  $0,520\dots = \frac{13}{25}$

دور العدد العشري  $\frac{13}{25}$  ( أي العدد العشري 0,52 ) هو الصفر .

- هل  $\frac{25}{13}$  الذي هو مقلوب  $\frac{13}{25}$  عدد عشري ؟ لا .

لاحظ أن :  $1,923076\dots = \frac{25}{13}$

نتيجة : مقلوب عدد عشري ليس دوما عدداً عشرياً

1) عيّن من بين الأعداد العشرية الآتية الأعداد التي مقلوبها عدد عشري :

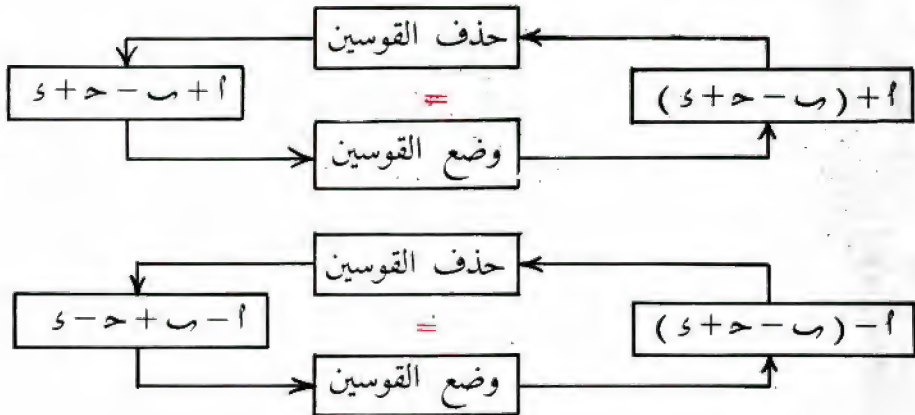
$$\frac{5}{10^3} ; \frac{52}{10^2} ; 0,625 ; -10 \times 4 - 1 ; 3,21 \times 10^{-2} .$$

2) ما هو مقلوب كل من الأعداد العشرية الآتية بتقريب  $10^{-4}$  بالنقصان :  
 $2,48 ; 1,54 ; 0,36 ; 12,4 .$

## 12. تطبيقات في ك :

1) قاعدة حذف أو وضع الأقواس :

ا، ب، ج، د أعداد ناطقة :



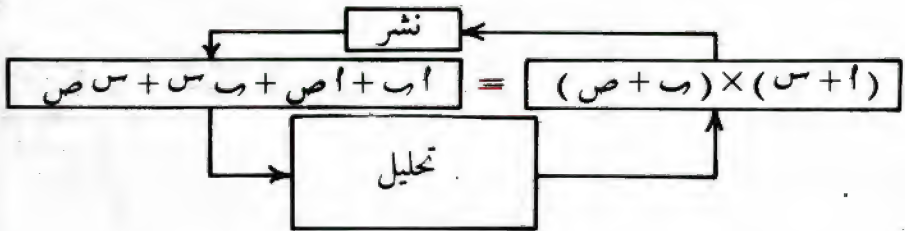
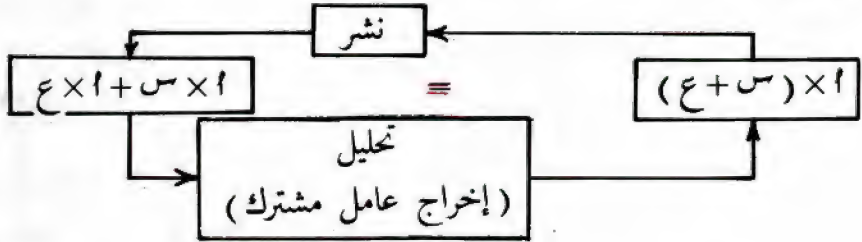
احسب بطريقتين كلا من المجاميع الآتية :

$$\left( \frac{9}{13} + \frac{3}{8} - \right) + \frac{5}{7} ; \left( 7,5 + \frac{2}{3} - 5 \right) + \frac{3}{2}$$

$$\left( 2 - \frac{3}{7} \right) - \left( 2 - \frac{9}{4} \right) ; \left( \frac{5}{7} - \frac{2}{3} + 3 \right) - 4$$

## (2) النشر والتحليل :

ا، س، ع، ص أعداد ناطقة .  
تذكر أن :



س، ع، ص أعداد ناطقة :

(1) انشر كلاً من الجداءات الآتية :

$$3(5-s) ; \left( 3 + \frac{5}{9} - s \right) \left( \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - ع \right) ;$$

$$6 \left( 2 - s - \frac{5}{6} ص + 1 \right) ; \frac{3}{2} س (5 - س - ع) ;$$

(2) حلّ كلاً من المجاميع الجبرية الآتية إلى جداء عاملين :

$$4س + 4ص ; \frac{3}{2} س - 5س ; \frac{7}{5} س^3 - \frac{1}{5} س^2 - \frac{2}{10} س + \frac{1}{35}$$

### (3) الجداءات الشهيرة :

س ، ع عددان ناطقان .

$$(س + ع)^2 = س^2 + 2س ع + ع^2$$

$$(س - ع)^2 = س^2 - 2س ع + ع^2$$

$$(س + ع)(س - ع) = س^2 - ع^2$$

أمثلة :

س ، ع عددان ناطقان .

$$(3س + ع)^2 = 9س^2 + 6س ع + ع^2$$

$$\left(\frac{1}{2} - س\right)^2 = \frac{1}{4} - س + س^2$$

$$\left(\frac{5}{6} - س\right)^2 = \frac{25}{36} - \frac{5}{2}س + س^2$$

$$\left(2س + \frac{3}{4}\right)\left(2س - \frac{3}{4}\right) = (2س)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 4س^2 - \frac{9}{16}$$

س ، ع عددان ناطقان .

(1) انشر كلاً مما يلي :

$$(3س + \frac{2}{5})\left(\frac{3}{2} - س\right), \left(\frac{4}{5} + س\right)(3س - 2)$$

(2) س ، ع ، ص أعداد ناطقة . انشر كلاً من الجداءات الآتية :



$$3س (5س - 3ع) ؛ (2س - 3ص) \left( \frac{2}{3}ص + \right) ؛$$

$$\frac{3}{2}س \left( \frac{2}{7}ع + \frac{5}{4}س \right) .$$

(3) حلّ كلاً من المجاميع الآتية إلى جُداء عاملين :

$$12س + 6ع - 15 ؛ 48س - 8س ع + 4س ص .$$

$$\frac{9}{4}س^2 - \frac{16}{25} ؛ 4س^2 - 4س ع + ع^2 ؛$$

$$\frac{16}{25}س^2 + س ع + \frac{4}{9}ع^2 .$$

13. المعادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد في  $\mathbb{K}$  :

(أ) تمهيد : تا تطبيق من  $\mathbb{K}$  إلى  $\mathbb{K}$  حيث تا (س)  $= \frac{2}{3}س - 1$

أكمل الجدول الآتي :

س	0	1	1,2	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{22}{7}$	$3 +$
تا (س)	$1 -$	$\frac{1}{3} -$	...	...	...	...	...

$$\frac{1}{3} - = \frac{3-2}{3} = 1 - 1 \times \frac{2}{3} = (1) \text{ تا} ؛ 1 - = 1 - 0 \times \frac{2}{3} = (0) \text{ تا}$$

1 - هو القيمة العددية للتطبيق تا من أجل  $s = 0$  ؛  $-\frac{1}{3}$  هو القيمة العددية

للتطبيق تا من أجل  $s = 1$  .

إنّ صورة كل من الأعداد 0 ، 1 ، 2 ، 1 ،  $\frac{1}{3}$  ،  $-\frac{5}{6}$  ،  $\frac{22}{7}$  ، 3 بالتطبيق تا

تسمى قيمة عددية للتطبيق تا .

(ب) مفهوم المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد في  $\mathbb{K}$  .

مثال : تا و ها تطبيقان في  $\mathbb{K}$  حيث :

تا (س) =  $2s - 1$  ؛ ها (س) =  $4s + 5$  .

أكمل الجدول الآتي :

س	$1 -$	0	$\frac{1}{2}$	$3 -$	1	2	1,2
تا (س)							
ها (س)							

بصفة عامة تا (س)  $\neq$  ها (س) ؛

ولكن من أجل  $s = -3$  فإن تا (س) = ها (س) .

• تا (س) = ها (س) تسمى معادلة في  $\mathbb{K}$  .

العدد الناطق (3 -) يسمى حلاً لهذه المعادلة .

$$\underbrace{\text{تا (س)}}_{\text{الطرف الأول}} = \underbrace{\text{ها (س)}}_{\text{الطرف الثاني}} ، \text{س هو المجهول}$$

• في المعادلة :  $2 - \text{س} = 1 - 4 + \text{س} + 5$  أس المجهول س هو 1  
فنقول إن هذه المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .  
حل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

مثال : لنحل المعادلة  $2 - \text{س} = 1 - 4 + \text{س} + 5$  .

(  $2 - \text{س} = 1 - 4 + \text{س} + 5$  ) معناه (  $2 - \text{س} = 4 - \text{س} + 1 + 5$  )  
وهذا يعني أن  $2 - \text{س} = 4 - \text{س} + 6$  أي  $2 - \text{س} = 6 - \text{س}$  وبقسمة الطرفين على (  $2 -$  )

$$\boxed{\text{س} = -3} \quad \text{أي} \quad \frac{2 - \text{س}}{2 -} = \frac{6 - \text{س}}{2 -}$$

فمجموعة حلول المعادلة المعطاة هي  $\text{مج} = \{ -3 \}$  .  
• لاحظ أن مجموعة حلول هذه المعادلة في صـ هي أيضا  $\text{مج} = \{ -3 \}$   
• لكن هذه المعادلة ليس لها حل في طـ ، أي أن مجموعة حلول هذه المعادلة في طـ هي  $\emptyset$  لأن  $( -3 ) \notin \text{ط}$  .

ملاحظة :

قبل الشروع في حل معادلة يجب تحديد المجموعة التي نحل فيها المعادلة .

(1) حل في  $\leq$  المعادلات الآتية :

$$2 \text{ س} + 3 = 15 ؛ \text{ س} - \frac{5}{3} = 5 - \frac{2}{3} \text{ س} - 1 ؛$$

$$4 \text{ س} - 3 = 7 \text{ س} + 12 ، \text{ س} - \frac{5}{8} = \frac{1}{2} - \frac{\text{س}}{4} . 5 -$$

- ما هي - من بين المعادلات السابقة - التي لها حل في ط ؛  
والتي لها حل في صه .

(2) حل في  $\leq$  كلاً من المعادلات الآتية :

$$2 = \left| \frac{2}{5} + \text{س} \right| ؛ \frac{3}{7} = \text{س} - 1 ؛ \frac{3}{7} = |1 - \text{س}|$$

14. الجذر التربيعي التام لعدد ناطق موجب :

- أكمل الجدول الآتي :

س	15	6 -	7 -	10	$\frac{3}{2}$	0.25	7 +	3,5 -
س <sup>2</sup>	225							

بصفة عامة :

لكل عدد ناطق س . مربع وحيد س<sup>2</sup> هو عدد ناطق موجب .

- هل يوجد عدد طبيعي س بحيث س<sup>2</sup> = 7056 ؟

لنحلّل العدد الطبيعي 7056 إلى جُداء عوامل أولية فنجد :

$$2^7 \times 3^2 \times 7^2 = 7056$$

لاحظ أن أسس العوامل الأولية كلها زوجية فيمكن أن نكتب  
 $7056 = (2^2 \times 3 \times 7)^2$

فالعدد الطبيعي الذي نبحت عنه هو  $84 = 2^2 \times 3 \times 7$   
 أي  $84^2 = (2^2 \times 3 \times 7)^2 = 7056$ .

نقول إن العدد الطبيعي 84 هو الجذر التربيعي التام للعدد الطبيعي 7056.  
 ونكتب:  $\sqrt{7056} = 84$ .

ونقرأ: الجذر التربيعي للعدد 7056 يساوي 84.

ملاحظة:

المجموعة  $M = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots, 2^2, \dots, (2 \times 25)^2\}$ .

هي مجموعة مربعات الأعداد الطبيعية.

يمكننا استعمال جداول خاصة بمربعات الأعداد الطبيعية ، لإيجاد الجذور التربيعية  
 التامة . أو حصر جذر تربيعي بين جذرين تامين متتاليين .

هل يوجد عدد ناطق  $\frac{49}{25}$  بحيث  $\frac{49}{25} = 2^2$  ؟

نعلم أن  $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{2^7}{2^5} = \frac{49}{25}$  . فالعدد  $\frac{49}{25}$  هو مربع للعدد الناطق  $\frac{7}{5}$ .

لاحظ أيضا أن  $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$  . فالعدد  $\frac{49}{25}$  هو أيضا مربع العدد الناطق  $\frac{7}{5}$ .

• إن العدد الناطق الموجب  $\frac{7}{5}$  يسمى الجذر التربيعي التام للعدد الناطق  $\frac{49}{25}$ .

وتكتب:  $\frac{7}{5} = \sqrt{\frac{49}{25}}$



تعريف :

ا عدد ناطق موجب .  
 إذا كان ا مربعاً فإن العدد الناطق الموجب ح حيث  $ا = ح^2$   
 يسمى الجذر التربيعي التام للعدد ا .

نكتب :  $\sqrt{ا} = ح$  .

ا عدد ناطق موجب ، ح عدد موجب  
 $\sqrt{ا} = ح$  معناه  $ا = ح^2$

ملاحظة :

بما أن  $0 = 0^2$  و  $1 = 1^2$  فإن  $0 = \sqrt{0}$  و  $1 = \sqrt{1}$  .

- هل يوجد عدد ناطق س بحيث  $\frac{19}{16} = س^2$  ؟ لا .

$\frac{19}{16}$  ليس مربعاً لأي عدد ناطق .

(1) عيّن - من بين الأعداد الطبيعية الآتية - الأعداد التي هي مربعات ، ثم  
 عيّن الجذر التربيعي التام لكل من هذه المربعات :

1982 ، 8200 ، 2646 ، 1764 .

(2) أوجد الجذر التربيعي التام لكل من الأعداد الناطقة الآتية :

$\frac{144}{100}$  ،  $\frac{81}{121}$  ،  $\frac{1764}{225}$  ،  $\frac{729}{784}$  .



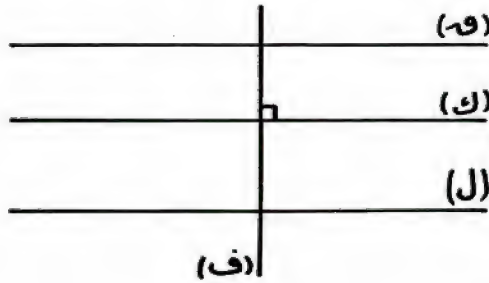
## قضاء عادل

جلس رجلان يتغذيان ، مع أحدهما خمسة أرغفة ، ومع الآخر ثلاثة أرغفة ، فلما وضعوا الغداء بين أيديهما مر بهما رجل ، فسلم ، فقالا : اجلس وتغذ ، فجلس وأكل معها ، واستوا في أكلهم الأرغفة الثمانية فقام الرجل وطرح إليهما ثمانية دراهم ، وقال : خذاها عوضا مما أكلت لكما ، وثلثه من طعامكما ، فتنازعا ، فقال صاحب خمسة الأرغفة : لي خمسة دراهم ، ولك ثلاثة ، وقال صاحب الأرغفة الثلاثة : لا أرضى إلا أن تكون الدراهم بيننا نصفين ، فارتفعا إلى أمير المؤمنين علي (ع) فقضا عليه قصتهما ، فقال لصاحب الثلاثة : قد عرض عليك صاحبك ما عرض ، وخبره أكثر من خبزك ، فارض بالثلاثة ، فقال : والله لا رضيت عنه إلا بمر الحق ، فقال علي : ليس لك في مر الحق إلا درهم واحد ، وله سبعة دراهم ، فقال الرجل : سبحان الله ! قال : هو ذلك ، قال : فعرفني الوجه في مر الحق حتي أقبله ، فقال علي : أليس للثمانية الأرغفة أربعة وعشرون ثلثا ؟ أكلتموها وأنتم ثلاثة أنفس ، ولا يعلم الأكثر منكم أكلا ، ولا الأقل ، فتحملون في أكلكم على السواء ، قال : فأكلت أنت ثمانية أثلاث ، وإنما لك تسعة أثلاث ، وأكل صاحبك ثمانية أثلاث ، وله خمسة عشر ثلثا ، أكل منها ثمانية ، وبقي له سبعة أكلها صاحب الدراهم ، وأكل لك واحدا من تسعة ، فلك واحد بواحدك ، وله سبعة ، فقال الرجل : رضيت الآن .



## 1. التعامد والتوازي :

(و) . (ك) . (ل) . (ف) مستقيمات في المستوي ، حيث :  
 (و) // (ك) : (ل) // (و) . (ف)  $\perp$  (ك) .



الشكل 1

- أكمل الجدول الآتي باستعمال أحد الرمز  $\perp$  ، // .

(و)	(ك)	(ل)	(ف)	
(و)		//		
(ك)				
(ل)	//			
(ف)		$\perp$		

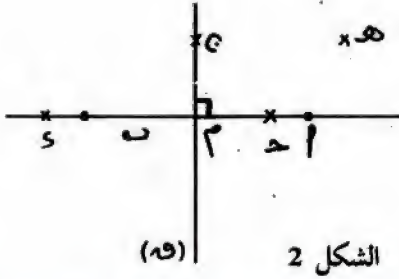
## 2. محور قطعة مستقيمة :

في الشكل 2 : (و) محور [أب] .  
الطول هـ م يسمى المسافة بين النقطة هـ والمستقيم

- أكمل ما يلي باستعمال أحد الرمز  $>$  ،  $=$  ، مع التعليل .

م ... أ م ب ؛ ح ... أ ح ب ؛ د ... أ د ب ؛ هـ ... أ هـ ب ؛

و ... أ و ب ؛ ز ... أ ز ب ؛



تذكر أن :

محور قطعة مستقيمة هو مجموعة نقاط المستوي المتساوية المسافة عن طرفي هذه القطعة .

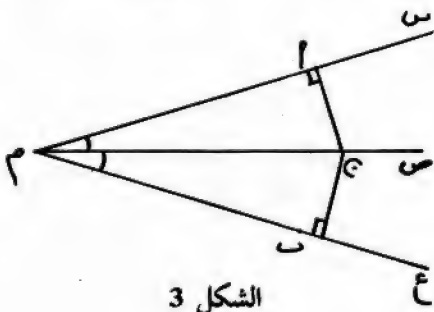
## 3. منصف زاوية :

في الشكل 3 .

[م ص هو منصف الزاوية [م س ، م ع] ، و [م ص ؛

أ ، ب هما المسقطان العموديان للنقطة هـ على [م س و [م ع على الترتيب

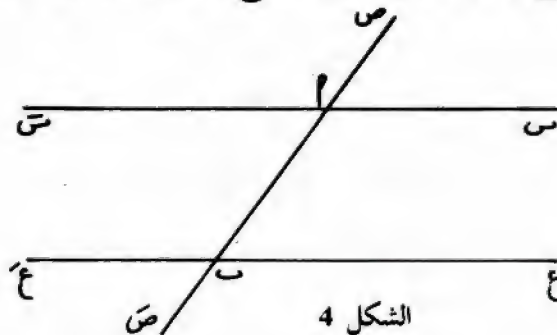
- برهن أن هـ أ = هـ ب .



متنصف زاوية هو مجموعة نقط المستوي المتساوية المسافة عن ضلعي هذه الزاوية .

#### 4. الزوايا المعينة بمستقيمين متوازيين وقاطع :

(س س') ، (ع ع') ، (ص ص') مستقيمت في المستوي حيث :  
(س س') // (ع ع') و (ص ص') قاطع لهما في ا ، ب (الشكل 4)



علل كلا مما يلي :

$$\begin{aligned} \widehat{ع ب ص} = \widehat{س ا ص} & ; \widehat{ع ب ص} = \widehat{س ا ص} ; \widehat{ع ب ص} + \widehat{س ا ص} = 180^\circ \\ \widehat{ص ا س} = \widehat{ص ب ع} & ; \widehat{ص ا س} = \widehat{ص ب ع} ; \widehat{ص ا س} + \widehat{ص ب ع} = 180^\circ \\ \widehat{ع ب ص} = \widehat{س ا ص} & . \end{aligned}$$

**إما** أن تتقايس زاويتان متبادلتان داخلياً أو خارجياً .

**إما** أن تتقايس زاويتان متماثلتان .

**أن** تتكامل زاويتان داخليتان أو خارجيتان واقعتان في جهة واحدة بالنسبة إلى القاطع .

لكي يكون :  
المستقيمان المقطوعان بقاطع  
متوازيين

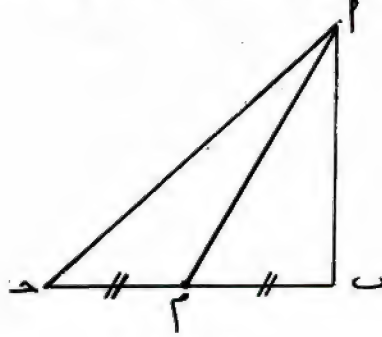
يكفي أن يتحقق أحد  
الشروط الثلاثة :



## 5. المستقيمت الخاصة في مثلث :

(أ) متوسطات مثلث :

أ ب ح مثلث ، م منتصف [ ب ح ] ( الشكل 5 ) .



الشكل 5

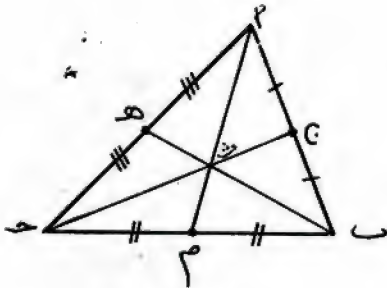
[ أ م ] هو متوسط للمثلث أ ب ح .

- في الشكل 6 [ أ م ] ، [ ب هـ ] ،

[ ح د ] متوسطات المثلث أ ب ح .

• تتقاطع هذه المتوسطات في نقطة

واحدة تسمى مركز ثقل المثلث .



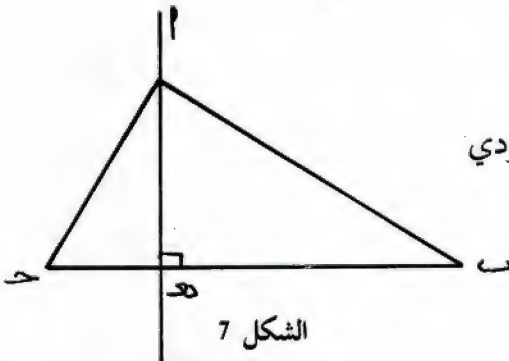
الشكل 6

لدينا :  $أث = \frac{2}{3} أ م$  ؛  $بث = \frac{2}{3} ب هـ$  ؛  $حث = \frac{2}{3} ح د$

( ب ) أعمدة مثلث :

أ ب ح مثلث حيث هـ هي المسقط العمودي

لنقطة أ على ( ب ح ) ( الشكل 7 ) .

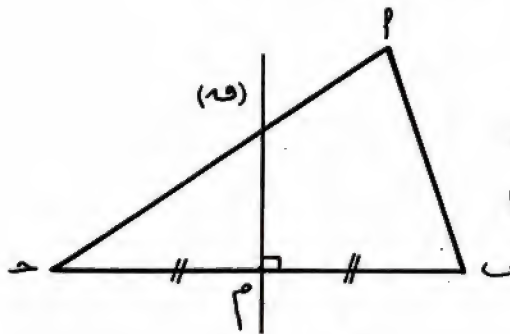


الشكل 7

- (أه) هو عمود للمثلث أ ب ح .
- والطول أه هو ارتفاع هذا المثلث المتعلق بالقاعدة [ ب ح ] .
- تتقاطع الأعمدة الثلاثة لمثلث في نقطة واحدة .
- عيّن نقطة تقاطع أعمدة مثلث قائم .
- عيّن نقطة تقاطع أعمدة مثلث إحدى زواياه منفرجة .

(ح) محاور مثلث :

أ ب ح مثلث حيث (ق) محور الضلع [ ب ح ] (الشكل 8) .



الشكل 8

- (ق) هو محور للمثلث أ ب ح .
- تتقاطع المحاور الثلاثة لمثلث في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المحيطة بهذا المثلث (الشكل 9) .

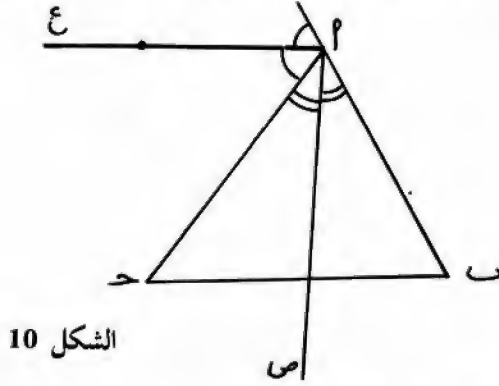


الشكل 9

يبيّن أن نقطة تقاطع محاور مثلث قائم هي منتصف وتره

د) منصفات زوايا مثلث :

أب ح مثلث حيث : [أص منصف الزاوية [أب ، أ ح] ؛ [أع منصف الزاوية الخارجية .



الشكل 10

- [أص منصف داخلي للمثلث أب ح .
- [أع هو منصف خارجي للمثلث أب ح .
- المنصفات الداخلية لمثلث تتقاطع في نقطة واحدة هي مركز الدائرة المرسومة داخل هذا المثلث والتي تسمى كل ضلع منه . ( الشكل 11 ) .



الشكل 11

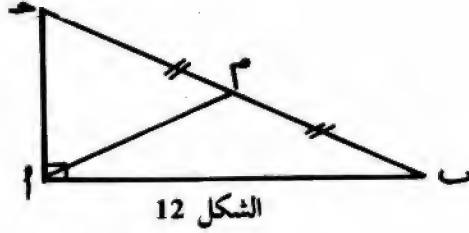
تذكر أن :

قيس أي زاوية خارجية بالنسبة إلى مثلث يساوي مجموع قيسي الزاويتين الداخليتين غير المجاورتين لها .

- بين أن حاملي المنصفين الداخلي والخارجي المتعلقين بنفس الرأس متعامدان .

## 6. المثلث القائم :

أ ب ح مثلث قائم في أ ، [أ م] متوسط متعلق بالوتر [ب ح] ، ( الشكل 12 ) .

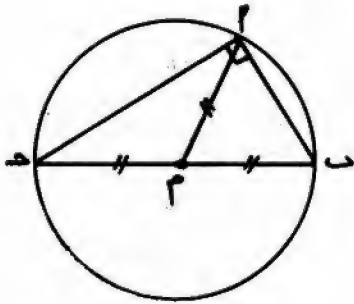


الشكل 12

• لدينا  $م أ = م ب = م ح$  أي  $م أ = \frac{ب ح}{2}$

• إذا كان في مثلث :

طول متوسط يساوي نصف طول الضلع المتعلق به ؛  
فإن هذا المثلث قائم ووتره هذا الضلع



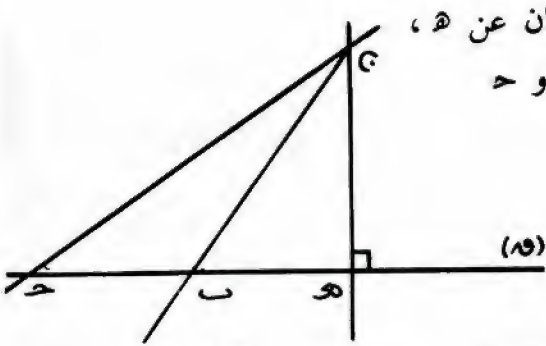
الشكل 13

الدائرة المحيطة بمثلث قائم :

الدائرة التي قطرها وتر مثلث قائم هي دائرة محيطة بهذا المثلث

## 7. المتباينات في مثلث :

(و) مستقيم ، د نقطة لا تنتمي إلى (و) ، ه هي المسقط العمودي  
للنقطة د على (و) .



الشكل 14

ب، ح نقطتان متمايزتان من (ق) مختلفان عن هـ،

حيث:  $\widehat{هـ} > \widehat{ح}$ . و ب تقع بين هـ و ح

- أكمل بأحد الرموز  $<$ ،  $>$ ،  $=$

ما يلي مع التعليل :

$\widehat{هـ} \dots \widehat{ب}$  ؛  $\widehat{ب} \dots \widehat{هـ}$  ؛  $\widehat{ح} \dots \widehat{هـ}$  ؛  $\widehat{ح} \dots \widehat{ب}$  ؛  
 $\widehat{ب} \dots \widehat{ح}$  ؛  $\widehat{ح} \dots \widehat{هـ}$  ؛  $\widehat{هـ} \dots \widehat{ب}$  ؛  $\widehat{هـ} + \widehat{ب} \dots \widehat{ب}$  ؛  
 $\widehat{ب} \dots \widehat{هـ} - \widehat{هـ}$  ؛  $\widehat{هـ} - \widehat{هـ} \dots \widehat{ب} \dots \widehat{هـ} + \widehat{ب}$  ؛  
 $\widehat{ب} \dots \widehat{ح} + \widehat{هـ} \dots \widehat{ب} \dots \widehat{هـ}$  ؛  $\widehat{ح} \dots \widehat{هـ}$  .

تذكر أن :

الضلع الأطول في مثلث يقابل الزاوية الأوسع ، والزاوية الأوسع تقابل الضلع الأطول .

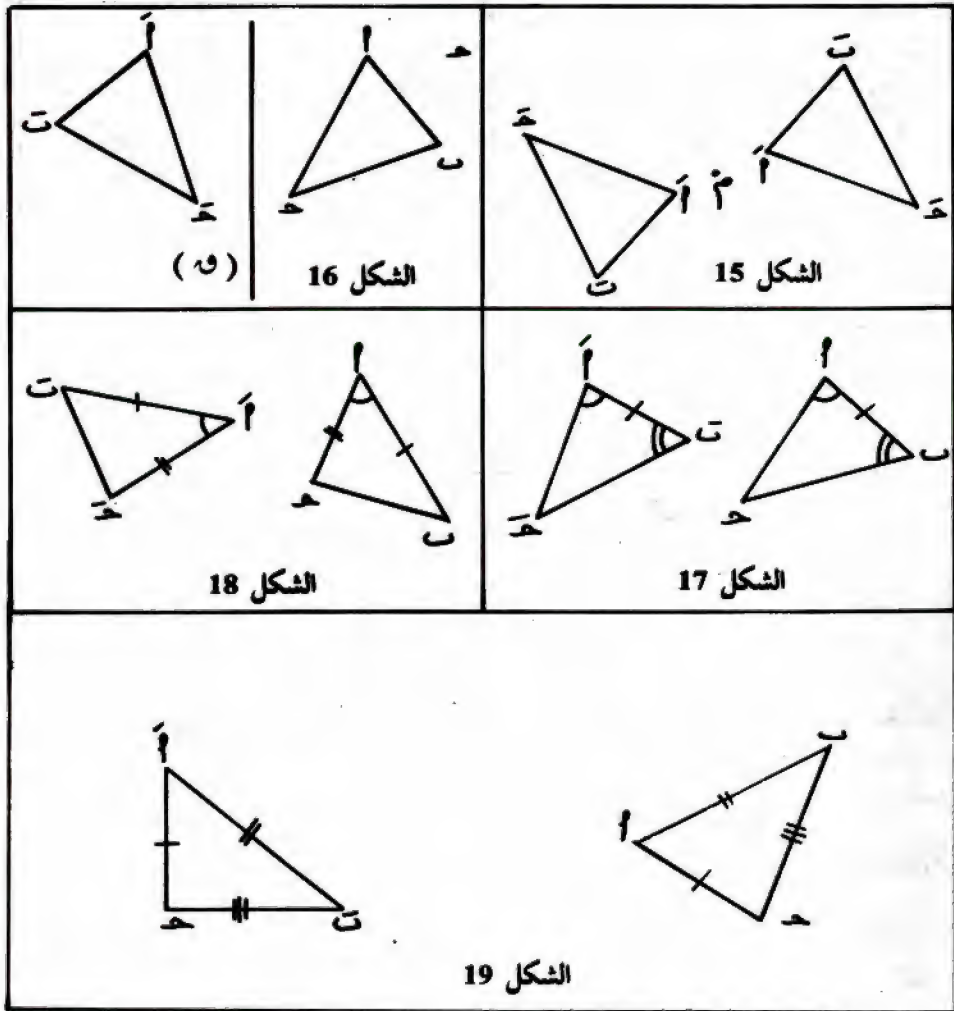
## 8. المثلثات المتقايسة :

تذكر أنه :

- يتقايس المثلثان  $أ ب ح$  ،  $أ' ب' ح'$  في كل حالة من الحالات الآتية :

- (1)  $أ ب ح$  ،  $أ' ب' ح'$  متناظران بالنسبة إلى النقطة م . (الشكل 15)
- (2)  $أ ب ح$  ،  $أ' ب' ح'$  متناظران بالنسبة إلى مستقيم (ق) ، (الشكل 16)
- (3)  $أ ب = أ' ب'$  ،  $أ = أ'$  ،  $ب = ب'$  . (الشكل 17)
- (4)  $أ ب = أ' ب'$  ،  $أ = أ'$  ،  $ح = ح'$  ،  $أ = أ'$  . (الشكل 18)
- (5)  $أ ب = أ' ب'$  ،  $أ = أ'$  ،  $ب = ب'$  ،  $ح = ح'$  . (الشكل 19)



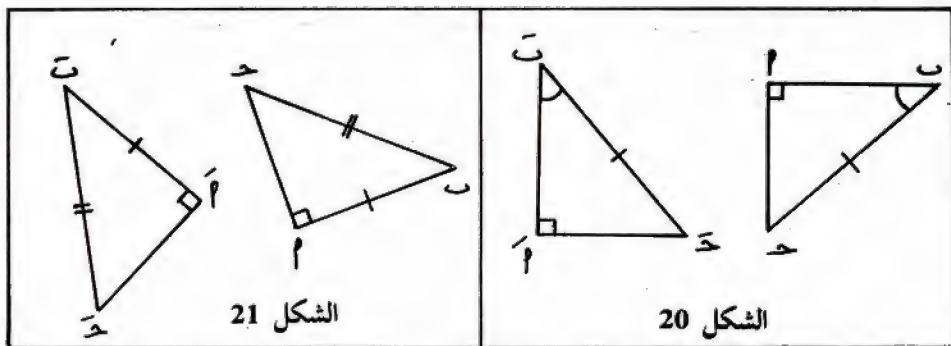


• حالات خاصة بتقايس مثلثين قائمين :

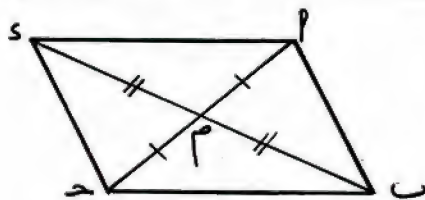
- يتقايس المثلثان  $ABC$  و  $A'B'C'$  القائمان في  $A$  ،  $A'$  على الترتيب في كل من الحالتين الآتيتين :

$$(1) \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad BC = B'C'$$

$$(2) \quad \widehat{C} = \widehat{C'}, \quad AC = A'C'$$



إذا كان الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع



الخواص الأضلاع	الخواص الزوايا	الخواص القطرين	التناظر
$\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$ $AB = CD$ $AD = BC$	$\hat{A} = \hat{C}$ $\hat{B} = \hat{D}$ $180^\circ = \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$ $180^\circ = \hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C}$ $180^\circ = \hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$ $180^\circ = \hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$	$AM = CM$ $BM = DM$	<p>م نقطة تقاطع القطرين هي مركز تناظر المتوازي الأضلاع <math>ABCD</math>.</p>

فإن

فإن هذا الرباعي	إذا كان في رباعي
متوازي أضلاع	<ul style="list-style-type: none"> <li>• كل ضلعين متقابلين متقايسين</li> </ul>
	أو
	• كل ضلعين متقابلين حاملهما متوازيين
	أو
	• ضلعان متقابلان متقايسين وحاملهما متوازيين
	أو
	• كل زاويتين متقابلتين متقايسيتين .
	أو
	• زاوية تكمل الزاويتين المتتاليتين معها .
	أو
	• القطران متناصفين .

ملاحظة :

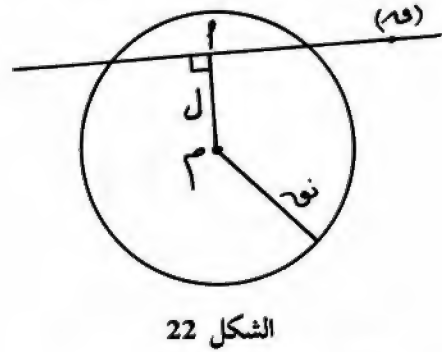
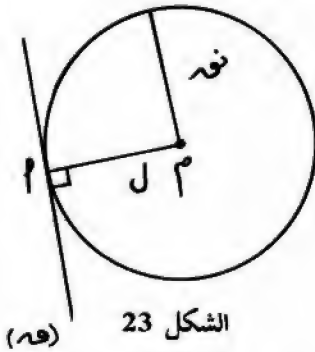
كل من المعين والمستطيل والمربع هو متوازي أضلاع خاص

<ul style="list-style-type: none"> <li>• اذكر خواص أضلاع وقطري المعين .</li> <li>• اذكر خواص أضلاع وزوايا وقطري كل من المستطيل والمربع .</li> <li>• اذكر عناصر التناظر في كل من المعين والمستطيل والمربع .</li> </ul>
---

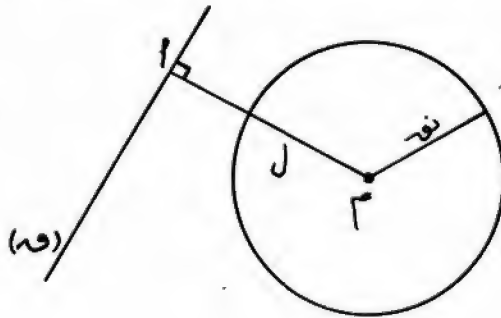
## 10. الأوضاع النسبية لمستقيم ودائرة :

د (م ، ن) دائرة ، (و) مستقيم ، نسمي  $ل$  المسافة بين المركز م والمستقيم (و) .

- إذا كان  $ل > ن$  فإن (و) قاطع للدائرة (الشكل 22)
- إذا كان  $ل = ن$  فإن (و) مماس للدائرة (الشكل 23)



- إذا كان  $ل < ن$  فإن (و) خارجي بالنسبة للدائرة (الشكل 24) .



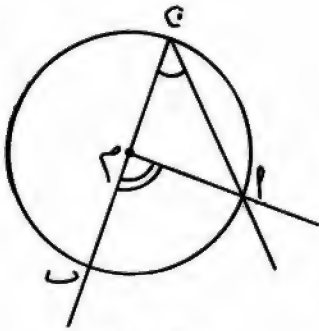
تذكر أن :

[(و) مماس للدائرة د (م ، ن) في النقطة أ] معناه  
 [(و)  $\perp$  (م أ) و  $ل = ن$ ]

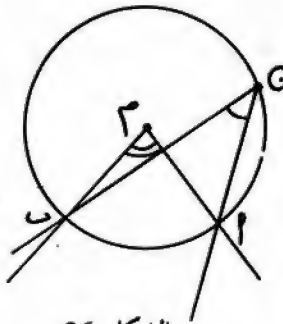
## 11. الزاوية المركزية والزاوية المحيطية في دائرة :

تذكر أن : قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس .

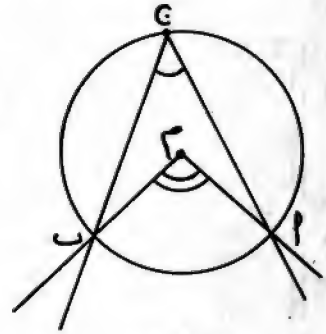
في كل من الأشكال الآتية لدينا :  $\hat{A} = \frac{1}{2} \hat{M}$  .



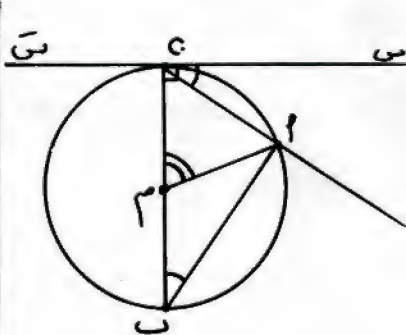
الشكل 27



الشكل 26



الشكل 25



الشكل 28

في الشكل 28 (س س') مماس  
للدائرة في النقطة م .

- برهن أن  $\hat{A} = \hat{S}$  .



## 1. الرباعي الدائري :

تذكر ما يلي :

•  $\angle \text{أ ب ح د} + \angle \text{أ ب د} = \angle \text{أ ب د} + \angle \text{أ ب ح} = 180^\circ$  معناه

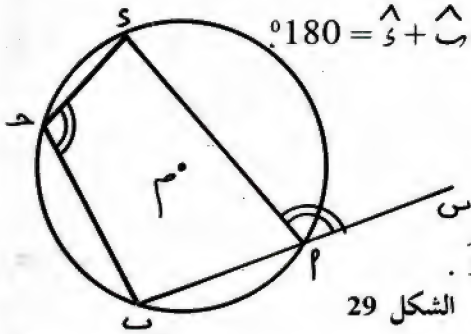
• الزاوية الخارجية في رباعي

دائري تقايس الزاوية المقابلة

للمجاورة لها .

في الشكل 29 لدينا :  $\angle \text{أ ب د} = \angle \text{أ ب ح}$  .

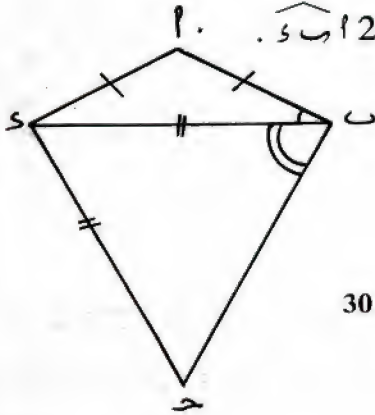
الشكل 29



إليك الشكل 30 حيث :

1.  $\angle \text{أ ب د} = \angle \text{أ ب ح}$  .

- برهن أن الرباعي أ ب ح د دائري .



الشكل 30



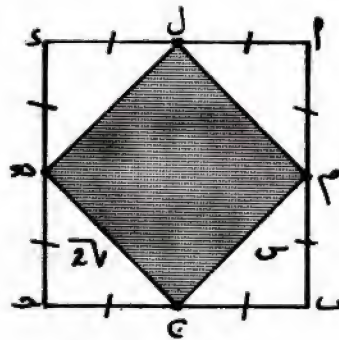
## مجموعة الأعداد الحقيقية: العمليات والترتيب في $\mathbb{R}$

3

### مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$

مقدمة :

كل عدد ناطق موجب يمكن استعماله للتعبير عن أقياس مختلفة ( طول قطعة ، قياس زاوية ، مساحة مضلع أو قرص ، حجم جسم ، .... ) لكن لا يمكن التعبير عن كل الأقياس بأعداد ناطقة . وأيضاً لا يمكن حل كثير من المعادلات في  $\mathbb{Q}$  . لذلك برزت فكرة توسيع المجموعة  $\mathbb{Q}$  إلى مجموعة أخرى ، كما وسعنا المجموعة  $\mathbb{N}$  إلى  $\mathbb{Z}$  ثم وسعنا  $\mathbb{Z}$  إلى  $\mathbb{R}$  .



الشكل 1

### 1. العدد الأصم :

★ المثال الآتي يبين وجود مربع مساحته 2 ، مع أن طول ضلع هذا المربع ليس عدداً ناطقاً .

إنشاء : وحدة الطول هي السمتير .  
أب ح د مربع طول ضلعه 2 . أي مساحته 4 .

النقط م ، د ، هـ ، ل هي منتصفات أضلاعه ( الشكل 1 )  
نحصل بهذا الإنشاء على المربع م د هـ ل الذي مساحته تساوي نصف مساحة المربع أ ب ح د . أي مساحته تساوي 2 ( لماذا ؟ ) .

نسمي س طول ضلع المربع م د هـ ل فيكون :

$$س \times س = 2 \quad \text{أي} \quad س^2 = 2$$

لكن لا يوجد عدد ناطق مربعه 2 ( يمكن البرهان على ذلك مستقبلاً ) .

بما أن المربع  $m$  هو الذي مساحته 2 موجود فعلاً ، فإن طول ضلعه الذي سميناه  $s$  موجود أيضاً . نقبل أنه عدد ينتمي إلى مجموعة أخرى منفصلة عن المجموعة  $\mathbb{S}$  تسمى مجموعة الأعداد الصماء . فالعدد  $s$  الذي مربعه 2 هو عدد أصم . نرسم له بالرمز  $\sqrt{2}$  ونكتب :  $s = \sqrt{2}$  .

جرت محاولات عديدة لإعطاء قيم تقريبية أدق أكثر فأكثر للعدد الأصم  $\sqrt{2}$  . مثلاً :

• الأعداد : 1 ، 1,4 ، 1,41 ، 1,414 ، 1,4142 هي قيم مقربة بالتقصان للعدد الأصم  $\sqrt{2}$  .

• الأعداد : 2 ، 1,5 ، 1,42 ، 1,415 ، 1,4143 هي قيم مقربة بالزيادة للعدد  $\sqrt{2}$  .

كل من :  $\sqrt{3}$  ،  $\pi$  ،  $\sqrt{5}$  ،  $\sqrt{6}$  ،  $\sqrt{\frac{1}{2}}$  ،  $\sqrt{\frac{18}{15}}$  ،  $\sqrt{1,5}$  هو عدد أصم .

نستعمل أحياناً في الحسابات قيم تقريبية للأعداد الصماء . فمثلاً نستعمل في حساب طول دائرة أو مساحة قرص ، العدد الأصم  $\pi$  الذي نعوضه بأحد العددين الناطقين  $\frac{22}{7}$  و 3,14 باعتبارهما قيمتين تقريبيتين للعدد  $\pi$  .

توجد قيم تقريبية أخرى أقرب فأقرب للقيمة الحقيقية للعدد  $\pi$  مثل القيم : 3,141 ، 3,1415 ، 3,14159 التي رأيتها في الصفحة الخاصة بالعدد  $\pi$  في كتاب السنة السابعة .

## 2. مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ :

إذا رمزنا لمجموعة الأعداد الصماء بالرمز  $A$  مثلاً ، فإن المجموعة  $\mathbb{S} \subseteq A$  هي أوسع من  $\mathbb{S}$  ومن  $A$  ، تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية ونرمز لها بالرمز  $\mathbb{R}$  . أي :  $\mathbb{R} = \mathbb{S} \cup A$

## ملاحظات :

(1) المجموعة  $\mathbb{C}$  أوسع من كل المجموعات العددية السابقة فهي غير منتهية .

$$\mathbb{C} \supset \mathbb{R} \supset \mathbb{Q} \supset \mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$$

(2) كل عدد حقيقي هو إما ناطق وإما أصم . أي :  
 $\mathbb{C} = \mathbb{A} \cup \mathbb{V}$

## 3. تمثيل المجموعة $\mathbb{C}$ :

تمثل المجموعة  $\mathbb{C}$  بمستقيم موجه (س س') ، حيث م نقطة كيفية منه (الشكل 2)



الشكل 2

نصطلح على ما يلي :

- (1) إذا كانت هـ نقطة من [م س' تختلف عن النقطة م ، فإن الاتجاه من م نحو هـ الاتجاه الموجب للمستقيم (س س') ، والاتجاه المعاكس هو الاتجاه السالب .
- (2) النقطة م تمثل العدد الحقيقي المعدوم 0 .
- (3) كل نقطة من [م س' تختلف عن م تمثل عددا حقيقيا موجبا .

(4) كل نقطة من [م س' تختلف عن م تمثل عددا حقيقيا سالبا .

نرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة أو المعدومة بالرمز  $\mathbb{C}^+$  .

ونرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية السالبة أو المعدومة بالرمز  $\mathbb{C}^-$  .

ويكون :  $\mathbb{C} = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{C}^-$  ،  $\mathbb{C} \cap \mathbb{C}^+ = \{0\}$

ونرمز لمجموعة الأعداد الحقيقية غير المعدومة بالرمز  $\mathbb{C}^*$  .



أمثلة :

• كل من  $\sqrt{2}$  ،  $\sqrt{3}$  ،  $\frac{17}{10}$  ،  $\pi$  ، 1,41 ، هو عدد حقيقي موجب .

• كل من  $-\sqrt{7}$  ،  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$  ،  $-\frac{22}{7}$  ،  $-0,66$  ،  $-\frac{\pi}{3}$  هو عدد حقيقي سالب .

(ملاحظة 1) إذا كان العددان الحقيقيان  $a$  ،  $b$  ينتميان إلى نفس المجموعة  $G$  + أو  $G$  - فنقول إنهما من نفس الإشارة .

(ملاحظة 2) كل عدد حقيقي (ناطق أو أصم) يمكن تمثيله بنقطة على مستقيم موجه . بينما يوجد عدد غير منته من نقط مستقيم موجه لا تمثل أي عدد ناطق .  
★ نقبل أن كل نقطة من مستقيم موجه تمثل عدداً حقيقياً .  
هذا يعني أنه :

« يوجد تطبيق تقابلي بين مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة نقط مستقيم موجه » .

القيمة المطلقة لعدد حقيقي :

تعريف :

القيمة المطلقة لعدد حقيقي غير معدوم  $s$  ، هي العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز إليه بالرمز  $|s|$  ونعرفه كما يلي :

$|s| = +s$  ، إذا كان  $s$  موجباً .  
 $|s| = -s$  ، إذا كان  $s$  سالباً .  
 $0 = |0|$

أمثلة :  $-\frac{13}{6} = \left(-\frac{13}{6}\right) = \left|\frac{13}{6}\right|$

$$. 5,7 = (5,7 -) - = |5,7 -|$$

$$\sqrt[3]{3} = |\sqrt[3]{3}|$$

$$\sqrt[3]{\frac{7}{5}} = \left( \sqrt[3]{\frac{7}{5}} - \right) - = \left| \sqrt[3]{\frac{7}{5}} - \right|$$

ملاحظة 1) لكل عدد حقيقي غير معدوم إشارة (إما + وإما -) وقيمة مطلقة .

ملاحظة 2)

- إذا كان  $a$  عدداً حقيقياً موجباً فإن  $-a$  هو عدد حقيقي سالب .
- وإذا كان  $a$  عدداً حقيقياً سالباً فإن  $-a$  هو عدد حقيقي موجب .
- كل من العددين الحقيقيين  $a$  ،  $-a$  هو معاكس الآخر
- أي أن  $a$  ،  $-a$  متعاكسان .

ويكون :

$$. |a| = |-a|$$

$$. a = (-a) -$$

مثال :

$$. 3,14 = |3,14| = |3,14 -| \quad \text{و} \quad 3,14 - = a - \quad \text{فإن} \quad 3,14 = a$$

$$. \sqrt[3]{3} = |\sqrt[3]{3}| = |\sqrt[3]{3} -| \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{3} = (\sqrt[3]{3} -) - = a - \quad \text{فإن} \quad \sqrt[3]{3} - = a$$

## العمليات في ج

### 1. تعريف :

كل العمليات التي عرفناها في المجموعة  $\mathbb{R}$  وهي الجمع والطرح والضرب والقسمة ، يمكننا أن نعرفها في المجموعة  $\mathbb{C}$  أيضا .

أي أنه مهما يكن العددين الحقيقيان  $a$  ،  $b$  فيمكننا أن نعرف مجموعهما  $a+b$  ، وفرقهما  $a-b$  ، وجداءهما  $a \times b$  أي  $a$  .  $b$  وحاصل القسمة  $a : b$  إذا كان  $b \neq 0$  .

فيكون كل من  $1+a$ ؛  $1-a$ ؛  $1$ ؛  $\frac{1}{b}$  (مع  $b \neq 0$ ) عددًا حقيقيًا  
وحدًا.

أمثلة : كل من :  $\sqrt[3]{3} + 1$  ،  $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{7}$  ،  $\sqrt[3]{3} \times 2$  ،  $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \div 7$  ،

هو عدد حقيقي .  $\frac{\sqrt[3]{5}}{7} + \frac{5}{6}$

## 2. خواص :

نقبل أن خواص العمليات التي درسناها في  $\mathbb{K}$  يمكن تعميمها في المجموعة  $G$ .

(1) خواص الجمع في ح :

- التبديل : مهما يكن العددان الحقيقيان  $a$  ،  $b$  فإن  $a + b = b + a$  .
  - التجميع : مهما تكن الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  ،  $c$  فإن :  

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
  - العنصر المحايد : مهما يكن العدد الحقيقي  $a$  فإن :  $a = a + 0 = 0 + a$
  - العدد 0 هو العنصر المحايد بالنسبة إلى الجمع في  $\mathbb{R}$  .
  - العنصر النظير : مهما يكن العدد الحقيقي  $a$  فإن  

$$0 = a + (a -) = (a -) + a$$
- أي لكل عدد حقيقي  $a$  نظير وحيد بالنسبة إلى عملية الجمع في  $\mathbb{R}$  هو معاكسه  $a -$



ملاحظة : مهما يكن العددين الحقيقيان  $a$  ،  $b$  فإن :

$$(a+b)- = -(b-a)$$

أي أن معاكس مجموع هو مجموع المعاكسين .

(2) خواص الضرب في  $\mathbb{R}$  :

- التبدل : مهما يكن العددين الحقيقيان  $a$  ،  $b$  فإن :  $a \cdot b = b \cdot a$  .
- التجميع : مهما تكن الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  ،  $c$  فإن :  

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
 .
- العنصر المحايد : مهما يكن العدد الحقيقي  $a$  فإن :  $a = a \times 1 = 1 \times a$  .  
 العدد 1 هو العنصر المحايد بالنسبة إلى الضرب في  $\mathbb{R}$  .
- العنصر النظير : مهما يكن العدد الحقيقي غير المعدوم  $a$  ، فإنه يوجد عدد حقيقي غير معدوم وحيد  $a^{-1}$  بحيث :

$$1 = a \times a^{-1} = a^{-1} \times a$$

نرمز للعدد  $a^{-1}$  بالرمز  $\frac{1}{a}$  ونسميه مقلوب  $a$  فيكون :

$$1 = a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a$$

• الضرب توزيعي بالنسبة إلى الجمع ، أي :

مهما تكن الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  ،  $c$  فإن :  $a(b+c) = (b+c)a$  .

ملاحظة (1) مهما يكن العددين الحقيقيان  $a$  ،  $b$  فإن :

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b) ; (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$



ملاحظة 2)  $(ا. ب = 0)$  معناه  $(ا = 0$  أو  $ب = 0)$   
 ملاحظة 3) مهما تكن الأعداد الحقيقية  $ا، ب، ح$  فإن :  
 $(ا + ب)(ب + ح) = (ا + ح)(ب + ح) + ا ب - ا ح$

احسب بطريقتين كلاً مما يلي :

$$\left(\frac{70}{56} - \frac{18}{14}\right) \times \left(\frac{11}{32} - \right) ; \frac{42}{15} \times \left(\frac{5}{9} - \right) \times \left(\frac{3}{7} - \right)$$

3) خواص الطرح في ح :

- مهما يكن العدد الحقيقي  $ا$ ، فإن  $ا - ا = 0$ ،  $ا - 0 = ا$
- الضرب توزيعي بالنسبة إلى الطرح، أي :
- مهما تكن الأعداد الحقيقية  $ا، ب، ح$  فإن :  $ا(ب - ح) = ا ب - ا ح$

ملاحظة 1) مهما يكن العددان الحقيقيان  $ا، ب$  فإن :

$$ا - ب = ب + ا - = (ب - ) - ا - = (ب - ا) -$$

أي أن معاكس  $(ا - ب)$  هو العدد  $ب - ا$ .

ملاحظة 2) مهما تكن الأعداد الحقيقية  $ا، ب، ح$  فإن :

$$ا + (ب - ح) = ب - (ا + ح) = (ب - ا) + ح$$

$$ا - (ب - ح) = ب - (ا - ح) = (ا + ب) - ح$$

$$ا - (ب + ح) = ب + (ا - ح) = (ا - ب) - ح$$

ملاحظة 3) مهما تكن الأعداد الحقيقية  $ا، ب، ح، د$  فإن :

$$(ا + ب)(ب - ح) = (ا - ح)(ب + د) + ا د - ا ح$$

$$(ا - ب)(ب - ح) = (ا - ح)(ب + د) - ا د + ا ح$$

#### (4) القسمة في ج :

1) حاصل قسمة عدد حقيقي  $a$  على عدد حقيقي غير معدوم  $b$  هو العدد الحقيقي الوحيد  $c$  بحيث  $b \times c = a$ .

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{نكتب}$$

نقول إن العدد الحقيقي  $\frac{a}{b}$  هو نسبة العدد الحقيقي  $a$  إلى العدد الحقيقي غير المعدوم  $b$ .

$a$  هو بسط النسبة  $\frac{a}{b}$  ،  $b$  هو مقامها .

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{معناه} \quad a = b \times c$$

(2) خواص :

مهما تكن الأعداد الحقيقية  $a, b, c, d$  (مع  $b \neq 0, d \neq 0$ ) فإن :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{مع } c \neq 0)$$

ملاحظة (1)  $\frac{1}{b} \times 1 = \frac{1}{b}$  (مع  $b \neq 0$ ).

$1 = \frac{1}{1}$  (مع  $1 \neq 0$ ) ؛  $0 = \frac{0}{b}$  (مع  $b \neq 0$ ).

ملاحظة (2)  $a, b, c$  أعداد حقيقية حيث  $b \neq 0$ .

$\frac{a-b}{b} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b}$  ؛  $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{b}$ .

$\frac{1}{c} = \frac{1}{c} \times \frac{b}{b} = \frac{b}{c} \div \frac{1}{b}$  (مع  $c \neq 0$ ).

(3) تساوي نسبتي :

مسألة :  $a, b, c, d$  أعداد حقيقية بحيث  $b, d$  غير معدومين

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ، نسبتيان متساويتان أي  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  لنبرهن أن  $ad = bc$ .

البرهان :

لدينا  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ، نسمي  $s$  القيمة المشتركة للنسبتين  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = s$  ،

• نعلم أن :  $s = \frac{a}{b}$  معناه  $a = s \times b$

وأن  $a = s \times b$  معناه  $s = \frac{a}{b}$  (مع  $b \neq 0$ ).



• ونعلم أيضا أن :  $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$  معناه  $a \times c = b \times \frac{a}{b}$

وأن  $a \times c = b \times \frac{a}{b}$  معناه  $a \times c = b \times \frac{a}{b}$  (بما أن  $a \neq 0$ )

وبما أن  $(a \times c) = b \times \frac{a}{b}$  إذن  $a \times c = b \times \frac{a}{b}$

إذن  $a \times c = b \times \frac{a}{b}$

نظرية :

ا، ب، ج، د أعداد حقيقية حيث  $a \neq 0$ ،  $b \neq 0$

إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فإن  $a \times d = b \times c$

برهن على النظرية الآتية :

ا، ب، ج، د أعداد حقيقية حيث  $a \neq 0$ ،  $b \neq 0$

إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فإن  $a \times d = b \times c$

من (1) و (2) نستنتج النظرية الآتية :

$\frac{a}{b}$ ،  $\frac{c}{d}$  نسبتان

معناه  $(a \times d = b \times c)$   $\left( \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \right)$



نتيجة :

$$\frac{1}{b} \text{ نسبة معلومة . لك عدد حقيقي غير معدوم}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{bk}$$

يمكن أن نعبّر عن هذه النتيجة بالمخطط الآتي :

$$\begin{array}{ccc} & : & \\ \frac{1}{b} & = & \frac{a}{bk} \\ & : & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \times & \\ \frac{1}{b} & = & \frac{a}{bk} \\ & \times & \end{array}$$

(1) إليك النسبة  $\frac{12}{15}$  أوجد أربع نسب مساوية لها .

(2) اكتب ثلاث نسب كل منها تساوي النسبة  $\frac{8\sqrt{}}{7}$  .

## تطبيقات على العمليات في ج

### 1. قوة عدد حقيقي .

(1) القوة التي أسها عدد طبيعي .

إذا كان  $s$  عدداً حقيقياً غير معدوم و  $n$  عدداً طبيعياً فالجداء .

$s \times s \times \dots \times s$  يسمى القوة النونية للعدد الحقيقي  $s$  ونرمز لها بالرمز  $s^n$  عاملاً .

س<sup>2</sup> ونقرأ « س أس<sup>2</sup> » .

نكتب :  $\underbrace{س \times س \times س \times \dots \times س}_{\text{ج عاملا}} = س^2$

تعريف :

القوة النونية للعدد الحقيقي س هي جداء ج عاملا كل عامل يساوي س

ملاحظة (1) :  $س^1 = س$  .

$س^2 = س \times س$  ويسمى مربع س .

$س^3 = س \times س \times س$  ويسمى مكعب س .

ملاحظة (2) :  $س^0 = 1$  (  $س \neq 0$  )

(2) القوة التي أسها عدد صحيح سالب :

تعلم أنه إذا كان س عدداً ناطقاً غير معدوم و ج عدداً صحيحاً فإن

$$\frac{1}{س^ج} = س^{-ج}$$

بصفة عامة :

نقبل أنه إذا كان س عدداً حقيقياً غير معدوم و ج عدداً طبيعياً فإن :

$$\frac{1}{س^ج} = س^{-ج}$$

أي أن  $س^{-ج}$  هو مقلوب  $س^ج$  .

أمثلة :

$$س^{-1} = \frac{1}{س} ; س^{-2} = \frac{1}{س^2} ; س^{-3} = \frac{1}{س^3}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{^5 10} &= ^5 -10 \ ; \ \frac{1}{^2 10} = ^2 -10 \ ; \ \frac{1}{10} = ^1 -10 \\ \frac{1}{^3 (\sqrt[2]{2})} &= ^3 -(\sqrt[2]{2}) \ ; \ \frac{1}{\sqrt[2]{2}} = ^1 -(\sqrt[2]{2}) \\ \frac{1}{^5 (\sqrt[3]{-})} &= ^5 -(\sqrt[3]{-}) \ ; \ \frac{1}{^2 (\sqrt[3]{-})} = \frac{1}{^2 (\sqrt[3]{-})} = ^2 -(\sqrt[3]{-}) \end{aligned}$$

(3) خواص :

- مهما يكن العدد الحقيقي غير المعدوم  $a$  . ومهما يكن العددان الصحيحان  $b$  .  $c$  فإن :  

$$^{b+c} a = ^b a \times ^c a \ ; \ ^{b-c} a = ^b a \div ^c a$$
- مهما يكن العددان الحقيقيان غير المعدومين  $a$  .  $b$  . ومهما يكن العدد الصحيح  $c$  فإن :  

$$^c (ab) = ^c a \times ^c b$$

2. المجموع الجبري في  $\mathbb{C}$  :

أمثلة :  $s$  ،  $e$  ،  $v$  أعداد حقيقية .

كل من :  $2s + 3e - v$  ؛  $\frac{3}{2}s + \sqrt[2]{v}$  ؛  $-5e + 3v - \frac{\sqrt[3]{v}}{2}$  ؛  
 $15s - e - \sqrt[7]{v}$  . هو مجموع جبري في  $\mathbb{C}$  .



## تعريف :

- س ، ع عددان حقيقيان .
- إذا كان « س < ع أو س = ع » فنقول إن س أكبر من ع أو يساويه ونكتب س ≤ ع .
  - إذا كان « س > ع أو س = ع » فنقول إن س أصغر من ع أو يساويه ونكتب س ≥ ع .

كل من العلاقتين « ..... < ..... » و « ..... > ..... » تسمى علاقة ترتيب في  $\mathbb{R}$ .

## ملاحظات :

- (1) مهما يكن العدد الحقيقي الموجب  $a$  فإن  $0 \leq a$ .
- (2) مهما يكن العدد الحقيقي السالب  $b$  فإن  $0 \geq b$ .
- (3) إذا كان  $a$  عدداً حقيقياً موجباً و  $b$  عدداً حقيقياً سالباً فإن  $a \leq b$ .

## (3) خواص :

- س ، ع ، ص أعداد حقيقية .
- (1) إذا كان س < ع و ع < ص فإن : س < ص .  
وإذا كان س > ع و ع > ص فإن : س > ص .
  - (2) إذا كان س ≤ ع و ع ≤ ص فإن : س ≤ ص .  
وإذا كان س ≥ ع و ع ≥ ص فإن : س ≥ ص .
  - (3) إذا كان س ≥ ع فإن : س + ص ≥ ع + ص .  
وإذا كان س + ص ≥ ع + ص فإن : س ≥ ع .
  - (4) إذا كان س ≤ ع و ص ≤ 0 فإن : س + ص ≤ ع + ص .  
وإذا كان س ≤ ع و ص > 0 فإن : س + ص ≥ ع + ص .



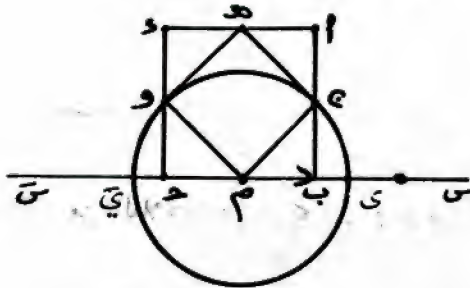
- بين أنه (1) إذا كان  $س \geq ع$  وكان  $ص > 0$  فإن  $س \leq ع$  .  
 (2) إذا كان  $ا \geq ب$  و  $ح \geq د$  فإن  $ا + ح \geq ب + د$

تمرين محلون : تمثيل العدد الحقيقي الأصم  $\sqrt{2}$  على مستقيم موجّه .

لاحظ الشكل 3 حيث :

• (س س') مستقيم موجّه

والنقطة م تمثل العدد الحقيقي 0 .



الشكل 3

• ا ب ح د مربع حيث ب ، ح نقطتان

من (س س') متناظرتان بالنسبة إلى م .

وطول ضلع هذا المربع يساوي 2 .

• النقط م ، و ، ه هي منتصفات الأضلاع [ا ب] ، [ب ح] ، [ح د] .  
 [ا د] ، على الترتيب .

نجد أن  $م = د = \sqrt{2}$  . (حسب الفقرة 1) .

لنرسم دائرة مركزها م ونصف قطرها م أي  $\sqrt{2}$  .

هذه الدائرة تقطع [م س' في نقطة ح' ، وتقطع [م س' في النقطة ح' نظيرة ح' بالنسبة إلى م .

فيكون  $م = ح' = م = د$  . (نصفا قطرين لنفس الدائرة) .

النقطة ح' تمثل العدد الحقيقي الموجب  $\sqrt{2}$  على المستقيم الموجّه (س س') .

والنقطة ح' تمثل العدد الحقيقي السالب  $(-\sqrt{2})$  على المستقيم (س س') .

لاحظ أن  $م = ب = 1$  وأن  $م = ب > م = ح'$  .

إذن  $\sqrt{2} > 1$

يمكن أن نستنتج أن  $2 > \sqrt{2} > 1$

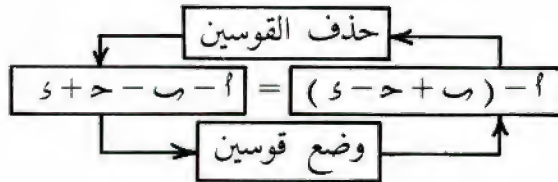
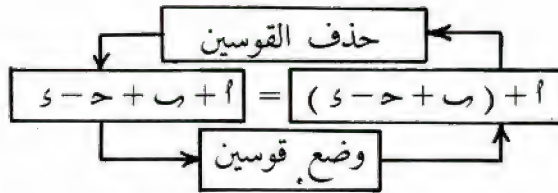
• فالعدد الأصم  $\sqrt{2}$  محصور بين العددين الناطقين 1 و 2 .

• توجد حصور أخرى للعدد  $\sqrt{2}$  بين أعداد ناطقة أدق من هذا الحصر مثلاً .

$2 > 1.5 > 1.42 > 1.415 > 1.4143 > \sqrt{2} > 1.4142 > 1.414 > 1.41 > 1.4 > 1$

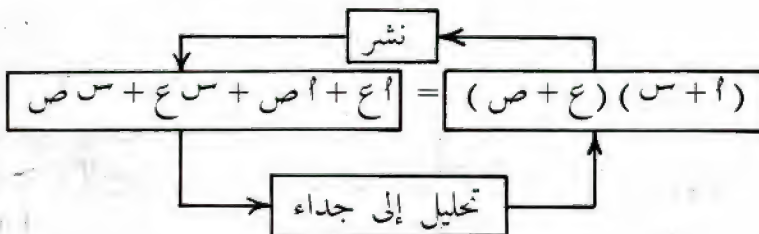
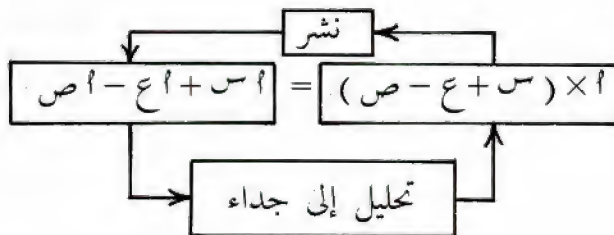
## 1) قاعدة حذف أو وضع الأقواس :

ا ، ب ، ج ، د أعداد حقيقية :



## 2) النشر والتحليل :

ا ، ب ، ج ، د أعداد حقيقية .



### 3) الجداءات الشهيرة

مهما يكن العددان الحقيقيان  $s$  ،  $e$  فإن :

$$(s + e)^2 = s^2 + 2se + e^2$$

$$(s - e)^2 = s^2 - 2se + e^2$$

$$(s - e)(s + e) = s^2 - e^2$$

### الترتيب في $\mathbb{R}$

1) العلاقات «..... < .....» و «..... > .....» في  $\mathbb{R}$  :

تعريف :

$s$  ،  $e$  عددان حقيقيان

- نقول إن  $s$  أكبر من  $e$  ونكتب  $s > e$  إذا كان الفرق  $s - e$  عددًا حقيقيًا موجبًا.
- ونقول إن  $s$  أصغر من  $e$  ونكتب  $s < e$  إذا كان الفرق  $s - e$  عددًا حقيقيًا سالبًا.

• مهما يكن العددان الحقيقيان المختلفان  $s$  و  $e$  فيمكن مقارنتهما بإحدى العلاقتين :

$$s < e \text{ أو } s > e$$

ونحصل على إحدى المتباينتين  $s < e$  أو  $s > e$ .

2) العلاقتان «..... ≤ .....» و «..... ≥ .....» في  $\mathbb{R}$  :

مهما يكن العددان الحقيقيان  $s$  ،  $e$  فيمكن مقارنتهما باستخدام إحدى العلاقات :

$$s < e \text{ أو } s > e \text{ أو } s = e$$

فيكون إما  $s < e$  وإما  $s > e$  وإما  $s = e$ .

تعمارين

- (3) استنتج من هذا الإنشاء أن  $\sqrt[2]{2} = \sqrt[8]{2}$ .

- $$6 \dots\dots = |5 - | \dots\dots | 5 - | \dots\dots | 4,7|, \dots\dots = |1,7 -$$

$$\frac{3}{7} = \frac{3}{7}$$

3. عين العدد الحقيقي من كل من الحالات الآتية:

$$0 = \left| \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{array} \right|, \quad - = \left| \begin{array}{cc} 1 & 3.5 \\ 1 & 7 \end{array} \right| \quad (1)$$

$$3 = \begin{vmatrix} 2 \\ s-5 \end{vmatrix}, 2 = \begin{vmatrix} 2-s \end{vmatrix}, 2 = \begin{vmatrix} 3-s \end{vmatrix} \quad (2)$$

4. أحسب ما يلي :

$$\therefore \frac{14}{8} - 3 + \frac{5}{12} = \text{,} \quad \frac{7}{4} + \frac{3}{5} - 9 = \text{,} \quad (1)$$

(2) احسب :  $m + m'$  ;  $m - m'$  ;  $m \times m'$  ;  $\frac{m}{m'}$  .

5. 1) احسب كلاً من العددين الحقيقيين :

$$\frac{\frac{1}{2} - 1}{2 - \frac{3}{7}} = \xi; \quad \frac{\left(\frac{1}{6} + 4 - \right) \left(\frac{3}{2} - 1\right)}{\frac{7}{2} - \frac{1}{5} + 2} = \eta$$



(2) احسب كلاً من :  $س + ع$  ،  $س - ع$  ،  $س \times ع$  ،  $\frac{س}{ع}$  .

6. إليك المساواة :

$$(\text{د} \Rightarrow \text{ط}^*) \frac{1}{1+\text{د}} - \frac{1}{\text{د}} = \frac{1}{(\text{د}+1)\text{د}}$$

(1) تحقق من صحة هذه المساواة من أجل  $\text{د} \in \{1, 2, 3, 4\}$

(2) استنتج طريقة بسيطة لحساب المجموع :

$$\frac{1}{5 \times 4} + \frac{1}{4 \times 3} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{2 \times 1}$$

7. احسب النسب الآتية :

$$\frac{2}{0,3} ; \frac{5}{\frac{1}{5}} ; \frac{4}{\frac{1}{3}} ; \frac{4}{\frac{1}{6}} ; \frac{1}{\frac{1}{7} + 5} ; \frac{1}{0,7} ; \frac{7}{12} ; \frac{2}{3}$$

8. أوجد القيمة المقربة إلى  $\frac{1}{10}$  لكل من الأعداد الحقيقية الآتية :

$$\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} - \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

(2) احسب القيمة المقربة إلى  $\frac{1}{10}$  لكل من الأعداد الحقيقية الآتية

$$\frac{1}{\frac{1}{5} + 1} ; \frac{1}{\frac{1}{4} + 1} ; \frac{1}{\frac{1}{3} + 1}$$

9. اكتب العدد الحقيقي  $\frac{7}{22}$  على شكل نشر عشري غير محدود دوري . ما هو دوره ؟

10. احسب الأعداد الحقيقية الآتية :

$$\begin{aligned} \text{س} &= 3f + 2f ; \text{ع} = 3f - 2f ; \text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{ع}} ; \text{حيث :} \\ (1) \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{2} &= f ; (2) \quad \frac{5}{2} = f \end{aligned}$$

11. احسب الأعداد الحقيقية الآتية :

$$\begin{aligned} \text{س} &= \left( \frac{1}{4} \right)^2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^3 ; \\ \text{ع} &= \left( \frac{3}{7} \right)^2 \times \left( \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \right)^2 ; \\ \text{ص} &= \left( \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right) \times \left( \frac{5}{6} + \frac{3}{4} - 2 \right)^2 \end{aligned}$$

12.  $f$ ،  $g$  عددان حقيقيان غير معدومين ؛ احسب كلا مما يلي :

$$\begin{aligned} & (f-g)^3 ; (f-g)^2 ; (f-g)^1 ; (f-g)^0 ; \\ & (f-g)^2 \times (f-g)^3 ; (f-g)^2 \times (f-g)^1 ; (f-g)^2 \times (f-g)^0 ; \\ & (f-g)^2 \times (f-g)^3 ; (f-g)^2 \times (f-g)^1 ; (f-g)^2 \times (f-g)^0 ; \\ & \left( \frac{f-g}{2} \right)^2 \times f^2 ; \left( \frac{f}{2} \right)^2 ; \left( \frac{f}{2} \right)^1 \end{aligned}$$

13. اكتب كلاً من المجاميع الجبرية الآتية بشكل أبسط . حيث  $f$ ،  $g$  عددان حقيقيان .

$$\begin{aligned} (1) \quad & (7+g+f) - (10,6+g-f) + (12,4-g+f) \\ (2) \quad & (5,1+g-f) + (8,21-g+f) - (5,09-g-3f) \\ (3) \quad & (1,2-g-3) (5+f) - (f+g-3,8) + (f^2-1,7) \end{aligned}$$

14. أكمل ما يلي :

$$\begin{aligned} (1) \quad & (.....) - g + f = (.....) - g + f = z - g + 4 - g + f \\ (2) \quad & (.....) - z + f = (.....) - g - f = 3,5 - z + g - g - f \end{aligned}$$

$$(3) \quad \text{ا} - \text{ب} + \text{ج} + 3.8 = \text{ا} - \text{ب} + (\dots\dots\dots) - \text{د} - \text{ه} = (\dots\dots\dots)$$

15. ا . ب . ج . د . ه أعداد حقيقية حيث :

$$\text{ا} = 103.52 \quad \text{ب} = 4.39 \quad \text{ج} = 31.27 \quad \text{د} = 89.48$$

$$\text{احسب (1) } (\text{ا} - \text{ب}) \cdot (\text{ج} - \text{د}) \quad \text{ثم } (\text{ا} - \text{د}) + (\text{ب} - \text{ج})$$

$$(2) \quad (\text{ا} - \text{ه}) \cdot (\text{ب} - \text{ج}) \quad \text{ثم } (\text{ا} - \text{ه}) + (\text{ب} - \text{ج})$$

16. اكتب كلا مما يلي بشكل أبسط :

$$(1) \quad (\text{ا} + \text{ب} - 3) - [(\text{ا} - 1) + (\text{ب} + 3)]$$

$$(2) \quad 5 - [(5\text{ا} - 3) + 2] - [2(\text{ب} + 2) + 3(\text{ا} + \text{ب})]$$

$$+ [4 + 2(\text{ا} - 2)] - 7 - [(\text{ا} - 9) + (5\text{ا} + 8)]$$

17. ا . ب . ج . د أعداد حقيقية حيث :

$$\text{ا} = 254.37 \quad \text{ب} = 175.373 \quad \text{ج} = 52.4$$

$$\text{احسب كلاً من : س} = \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} \quad \text{ع} = \text{ا} + \text{ب} - \text{ج} \quad \text{ص} = \text{ا} - \text{ب} + \text{ج}$$

$$\text{ك} = \text{ا} - \text{ب} - \text{ج} \quad \text{ل} = 2\text{س} + 3\text{ع} - 4(\text{ص} - \text{ك})$$

18. س عدد حقيقي حيث  $\text{س} < 5$

$$\text{أوجد : } |\text{س} - 2| \quad ; \quad |\text{س} - 5| \quad ; \quad |5 - \text{س}|$$

$$\text{ثم أوجد : } |\text{س} + 2| \quad ; \quad |3 - \text{س}| \quad ; \quad |0.5 - \text{س}| \quad \text{إذا كان } \text{س} > 2$$

19. بسط كلا مما يلي ، حيث ا ، ب ، ج أعداد حقيقية :

$$(1) \quad 2(\text{ا} - \text{ب}) - 5(\text{ا} + \text{ب} - 2)$$

$$(2) \quad \text{ا}(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج}) - \text{ب}(\text{ا} + \text{ج} - \text{ا}) - \text{ج}(\text{ا} + \text{ب})$$

$$(3) \quad 4(\text{ا} - \text{ب} + \text{ج} - 5) - (\text{ا} + \text{ب} - \text{ج}) - 5(\text{ا} + \text{ب} - \text{ج})$$

20. حلل كلا مما يلي إلى جداء . حيث س . ع عددان حقيقيان :

$$(1) \quad 15\text{س} + 25\text{ع} - 5 \quad (4) \quad 9\text{س}^2 - 4 \quad ;$$

$$(2) \quad 21\text{س} + 28\text{ع} - 35 \quad (5) \quad 25\text{س}^2 - 49 \quad ;$$

$$(3) \quad 24\text{س}^2 - 18\text{س} - 12 \quad (6) \quad 81\text{س}^2 - 64 \quad ;$$

21. انشر كلاً مما يلي : حيث س ، ع عدنان حقيقيان :

$$(7 + 3س) (7 - 3س) ، (2س - 1)^2 ، (3س - 3)^2 ، (5س + 3)^2$$

$$؛ \left( \frac{1}{4} + س \frac{2}{3} \right)^2 ؛ (2س + 0,5)^2 ؛ (5س - 4) (5س + 4)$$

$$\left( س \frac{2}{7} + \frac{3}{5} \right) \left( س \frac{2}{7} - \frac{3}{5} \right) ؛ \left( \frac{5}{3} - س \frac{3}{5} \right)^2$$

22. حلل كلا مما يلي إلى جداء حيث س ، ع عدنان حقيقيان :

$$(1) 64س^2 - 48س + 9 ؛$$

$$(2) 9س^2 - 12س + 4 ع^2 .$$

$$(3) 9س^2 + 48س + 64 .$$

$$(4) 36س^2 + 60س + 25 .$$

23. حلل كلا مما يلي إلى جداء عاملين حيث س ، ع عدنان حقيقيان :

$$(1) (2س + 7) (س - 4) - (س + 5) (س - 4) .$$

$$(2) (س - 3) (س - 7) - (4س^2 + 36س - 24) (س) .$$

$$(3) (س + 3) (س + 3) + (س - 1) (4س + 5) (س + 3) .$$

$$(4) 3س^3 + 3س^2 - 4س - 12 .$$

24. برهن أن :

$$(1) (س + ع)^3 = 3س^3 + 3س^2ع + 3س ع^2 + ع^3 .$$

$$(2) (س - ع)^3 = 3س^3 - 3س^2ع + 3س ع^2 - ع^3 .$$

$$(3) 3س^3 - ع^3 = (س - ع) (س^2 + س ع + ع^2) .$$

$$(4) 3س^3 + ع^3 = (س + ع) (س^2 - س ع + ع^2) .$$

25. بين أنه :

$$(1) إذا كان  $\frac{1}{2}س + 3 \geq 5 - ع$  فإن :  $\frac{1}{2}س \geq 8 - ع$  .$$

$$(2) إذا كان  $2س - 6 \leq 4 + ع$  فإن :  $3 - س \leq 2 + ع$  .$$

$$(3) إذا كان  $7 - س \geq 3 - ع$  فإن :  $7 - س \leq 3 - ع$  .$$



26. استعمل الرياضي الشهير محمد بن موسى الخوارزمي في القرن الثالث هجري الحصر الآتي :

$$3,1428 > \pi > 3,1416 \text{ أي } \frac{1}{7} + 3 > \pi > \frac{62832}{10 \times 2^4}$$

(1) عين من بين الأعداد الحقيقية الآتية الموجب منها والسالب :

$$\pi - \frac{22}{7} ; (5 - \pi) ; (3 - \pi) ; (3,15 - \pi) ; (3,14 - \pi)$$

(2) أكمل ما يلي بتقريب 0,0001 كلاً مما يلي :

$$\begin{aligned} \dots &= |3,15 - \pi| ; \dots = |3,14 - \pi| \\ \dots &= \left| \pi - \frac{22}{7} \right| ; \dots = |2 - \pi| \end{aligned}$$

27. إليك الحصرين :

$$3,14160 > \pi > 3,14159$$

$$2,752 > \pi > 2,751$$

حيث  $\pi$  نصف قطر قرص مساحته م .

أوجد حصراً للعدد م من الشكل :

$$f > m > b \text{ حيث } b - f = 10 \times 10^{-4}$$

## رياضيون من المغرب الكبير

• ابن الياسمين :

عاش في المغرب وتوفي عام 1201 م .  
يعتبر من بين مؤسسي المدرسة العربية المغربية في الحساب والجبر . له كتاب  
« تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار » . واستعمل في هذا الكتاب الرموز مثل  
رموز الكسور باستعمال الخط الفاصل بين البسط والمقام .  
وتحدث عن الرمز  $\sqrt{\quad}$  للدلالة على الجذر التربيعي .

وضع ابن الياسمين « أرجوزة » صاغ فيها قواعد الحساب والجبر شعراً ، وعالج  
فيها على الخصوص حلول المعادلات النموذجية الست للخوارزمي .

• ابن البناء :

ولد وعاش في مراكش ما بين ( 654 هـ / 1256 م - 721 هـ / 1321 م )  
كان أبوه بناء فتولع بالهندسة وتعلمها من أستاذه القاضي الشريف ، ونبغ في  
الرياضيات والفلك وألف فيها كما ألف في فنون أخرى كالمنطق والأصول والفرائض .

ومن أبرز كتبه الرياضية « كتاب تلخيص أعمال الحساب » الذي لخص فيه  
التقليد الرياضي الجبري في المغرب والأندلس . وحسب بعض المؤرخين فإنه لخصه  
من كتاب الجبر لعبد الرحمن القرش نزيل بجاية توفي بها ( سنة 580 هـ / 1184 ) الذي هو  
فضل شارح الجبر أبي كامل ، وأظهر فيه استقلال الحساب والجبر عن الهندسة . لقد اشتهر هذا  
الكتاب شرقا وغربا وبقي مرجعا لعدة قرون .

• ابن قنفذ القسنطيني :

ولد سنة 720 هـ وتوفي عام 810 هـ / 1406 م  
ألف كثيراً في الرياضيات والفلك والفرائض والدين .

من كتبه الرياضية « كتاب حط النقاب عن وجوه أعمال الحساب » وهو شرح  
لتلخيص ابن البناء .

وحسب نتائج البحث في تاريخ الرياضيات ~~لأن ابن قنفذ هـ~~ فإن ابن قنفذ هـ من بين  
الرياضيين الذين استعملوا الرموز في المعادلات وفي كثيرات الحدود . وهو أول من  
استعمل الصفر كطرف ثان لمعادلة مثلاً  $30^2$  إلا 50 ل 0 .  
وتقرأ : 30 شيئاً إلا 50 يعدل صفراً .

ونعبر الآن عن هذه المعادلة كما يلي :

$$30^2 - 50 = 0 .$$

• الفلصادي :

رياضي أصله من بسطة بالأندلس ، رحل إلى تلمسان وسمع من علمائها وسافر  
إلى القاهرة وعاد إلى باجة بتونس حيث توفي عام 891 هـ / 1486 م .

وحسب المؤرخين ، فإن أكثر مؤلفاته في الفرائض والحساب .  
ومن بين مؤلفاته الرياضية « كتاب كشف الأسرار عن علم حروف الغبار » الذي  
لخصه عام 852 هـ من كتابه « كشف الجلباب عن علم الحساب » .  
وقد استعمل في هذا الكتاب الرموز الرياضية ومن بينها الرمز ج للدلالة على  
الجذر التربيعي مثلاً  $25^{\frac{1}{2}}$  هو 5 أي  $5 = \sqrt{25}$  .  
وساهم في تحسين طريقة حل المعادلات من الدرجة الأولى .



## الأشعة في المستوى

4

### مجموعة أشعة المستوى

#### 1. مفهوم الشعاع :

(س س') مستقيم ، ب نقطتان منه (الشكل 1)



مثال : نريد أن نختار أشعة مختلفة .  
 • الثنائية المرتبة (أ ، ب) التي نسميها ثنائية نقطية ، تبين شعاعاً ، نرمز له بالرمز  $\overrightarrow{أ ب}$  أو برمز آخر مثل  $\overrightarrow{ش}$ .



نقول إن (أ ، ب) تمثل الشعاع  $\overrightarrow{ش}$   
 ونكتب :  $\overrightarrow{ش} = \overrightarrow{أ ب}$  (الشكل 2)

- منحنى المستقيم (س س') يسمى منحنى الشعاع  $\overrightarrow{ش}$
  - الاتجاه من أ إلى ب يسمى اتجاه الشعاع  $\overrightarrow{ش}$ .
  - طول القطعة [أ ب] يسمى طولاً أو معيار الشعاع  $\overrightarrow{ش}$ .
- نكتب :  $\overrightarrow{ش} = \|\overrightarrow{أ ب}\| = \|أ ب\|$

#### ملاحظات :

1) الثنائية النقطية (أ ، أ) تمثل الشعاع  $\overrightarrow{أ أ}$  الذي نسميه الشعاع المعلوم . ونرمز له بالرمز  $\vec{0}$  أي :

$$\vec{0} = \|\vec{0}\| \text{ و } 0 = \|\vec{0}\|$$



$\vec{a} = \vec{0}$  يعني أن النقطتين  $A$  و  $B$  متطابقتان. أي:  $(A, B) = (B, A)$

(2) إذا كان  $\vec{a} \neq \vec{0}$  فإن  $(A, B) \neq (B, A)$

الثانية النقطية  $(A, B)$  تعين الشعاع  $\vec{AB}$  الذي:

• منحاؤه هو منحنى الشعاع  $\vec{AB}$

• اتجاهه هو عكس اتجاه  $\vec{AB}$

• ومقياره هو مقيار  $\vec{AB}$  أي  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{AB}\|$

الشعاع  $\vec{AB}$  يسمى الشعاع المعاكس للشعاع  $\vec{AB}$ .

(3) يوجد في المستوي عدد غير منته من الثنائيات النقطية التي تمثل نفس الشعاع.

مجموعة أشعة المستوي هي مجموعة غير منتهية  
نرمز لهذه المجموعة برمز مثل  $\vec{a}$

## 2. تساوي شعاعين :

تعريف :

الشعاعان المتساويان هما شعاعان لهما  
نفس المنحنى ونفس الاتجاه ونفس الطويلة.

- في الشكل 3 الشعاعان  $\vec{a_1}$  و  $\vec{a_2}$  متساويان

ونكتب  $\vec{a_1} = \vec{a_2}$

الشكل 3

وأبضا في الشكل 4 :  $\vec{a_1} = \vec{a_2}$

الشكل 4

ملاحظة 1 :  $a$ ،  $b$  نقطتان من  $(ss')$  (الشكل 5)  
الشعاعان  $\overrightarrow{ab}$  و  $\overrightarrow{ba}$  متعاكسان

نكتب :  $\overrightarrow{ab} = -\overrightarrow{ba}$



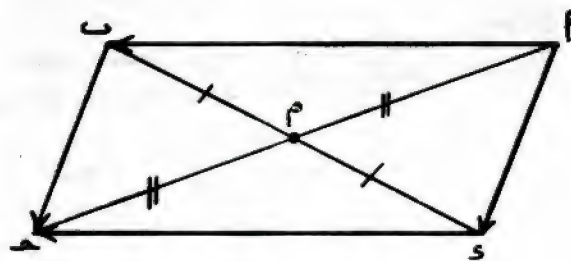
الشكل 5

ملاحظة 2 :

•  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ،  $d$  أربع نقط من المستوي كل ثلاث منها ليست على استقامة واحدة :

إذا كان  $(\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{cd})$  فإن  $(ab) \parallel (cd)$  و  $ab = cd$

نستنتج أن الرباعي  $abcd$  متوازي أضلاع .  
نستنتج أيضًا أن للقطعتين  $[ac]$  و  $[bd]$  نفس المتصف .



الشكل 6

• يمكن أن نبرهن أنه إذا كان الرباعي  $abcd$  متوازي أضلاع ، فإن :  
 $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$  و  $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$

- (1) م منتصف القطعة [أب] .  
 - هل  $\overrightarrow{مأ} = \overrightarrow{مب}$  ؟ وهل  $\overrightarrow{أم} = \overrightarrow{بم}$  ؟
- (2) أ نقطة من نصف المستقيم [م س ، ب نقطة من نصف المستقيم [م ع  
 بحيث  $م = \frac{1}{2} م ب$  .  
 - هل  $\overrightarrow{مأ} = \overrightarrow{مب}$  ؟
- (3) (س ع) . (س' ع') . مستقيمان متوازيان ، أ و ب نقطتان من  
 (س ع) ، ح نقطة نقطة من (س' ع') .  
 ع'ن نقطة د من (س' ع') . بحيث  $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ح د}$  .  
 ع'ن نقطة هـ من (س' ع') بحيث  $\overrightarrow{أب} = -\overrightarrow{ح هـ}$  .
- (4) د (م . م) دائرة . د<sub>1</sub> ، د<sub>2</sub> ، د<sub>3</sub> نقط من د .  
 هل  $\overrightarrow{م د_1} + \overrightarrow{م د_2} + \overrightarrow{م د_3}$  أشعة متساوية ؟

## (1) مجموع شعاعين :

تعريف :

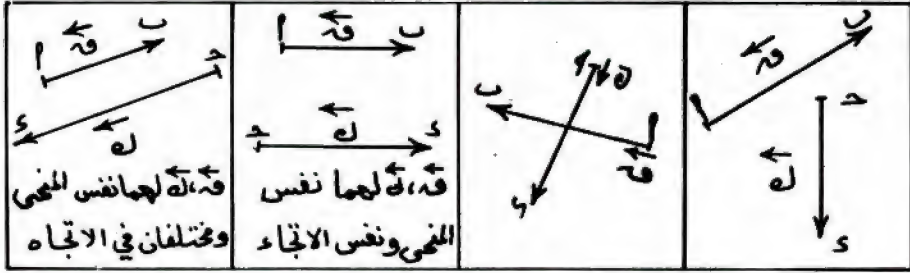
مجموع شعاعين  $\overrightarrow{قأ}$  ،  $\overrightarrow{كأ}$  هو الشعاع  $\overrightarrow{لأ}$  بحيث :  
 إذا كان (أ ، ب) ممثلاً للشعاع  $\overrightarrow{قأ}$  و (ب ، ح) ممثلاً للشعاع  $\overrightarrow{كأ}$   
 فإن (أ ، ح) ممثل للشعاع  $\overrightarrow{لأ}$

نكتب :  $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} = \overrightarrow{أج}$  أي  $\overrightarrow{قأ} + \overrightarrow{كأ} = \overrightarrow{لأ}$  .

## (2) تمثيل مجموع شعاعين :

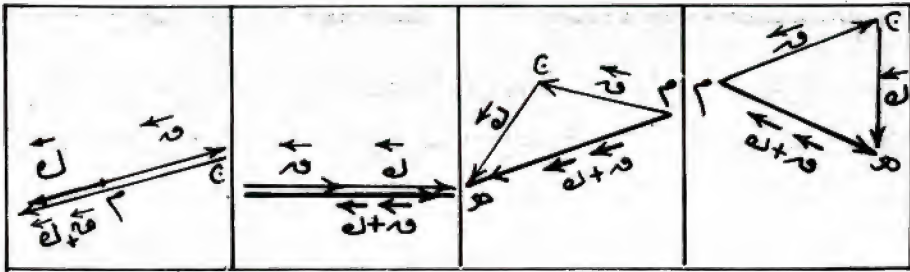
$\overrightarrow{قأ}$  ،  $\overrightarrow{كأ}$  شعاعان بحيث :  $\overrightarrow{قأ} = \overrightarrow{أب}$  و  $\overrightarrow{كأ} = \overrightarrow{بج}$  .

لنبحث عن ممثل للشعاع  $\vec{q} + \vec{k}$  في الحالات الآتية :



لكي نمثل المجموع  $\vec{q} + \vec{k}$  :

- نختار ثلاث نقط م، د، هـ بحيث :  $\vec{m} = \vec{d}$  ،  $\vec{d} = \vec{h}$  ،  $\vec{h} = \vec{s}$  .
- فنحصل على الأشكال الآتية ، حيث  $\vec{m} = \vec{h} = \vec{m} + \vec{d} = \vec{d} + \vec{h}$  أي  $\vec{m} = \vec{h} = \vec{q} + \vec{k}$  .



ملاحظات :

- مهما كانت النقط أ، ب، ج من المستوي فلدينا :  
 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  ( هذه المساواة تسمى علاقة شال )
- إذا كانت ب منتصف [أج] فإن  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  ..
- أ ب ج متوازي أضلاع ، لدينا حسب علاقة شال :  
 $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$  و  $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$   
 لكن  $\vec{a} = \vec{b}$   
 إذن  $\boxed{\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}}$
- في الفيزياء ، الشعاع  $\vec{a}$  يسمى محصلة الشعاعين  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  .



### (3) الجمع في المجموعة شـ :

إذا أرفقنا كل ثنائية (ق، ك) من شـ  $\times$  شـ بالشعاع الوحيد لـ الذي هو مجموع ق، ك، فنعرّف بذلك تطبيقاً من شـ  $\times$  شـ إلى شـ نسميه الجمع الشعاعي أو الجمع في شـ .

### (4) خواص الجمع الشعاعي :

نقبل أن لعملية الجمع في شـ الخواص الآتية :

• التبدل : مهما يكن الشعاعان ق، ك فإن  $ق + ك = ك + ق$  .

• التجميع : مهما تكن الأشعة ق، ك، ل فإن :

$$(ق + ك) + ل = ق + (ك + ل) .$$

نكتب أيضاً  $ق + ك + ل = ق + (ك + ل) = (ق + ك) + ل$  .

• العنصر الحيادي : مهما يكن الشعاع ق فإن  $ق + 0 = 0 + ق = ق$  .

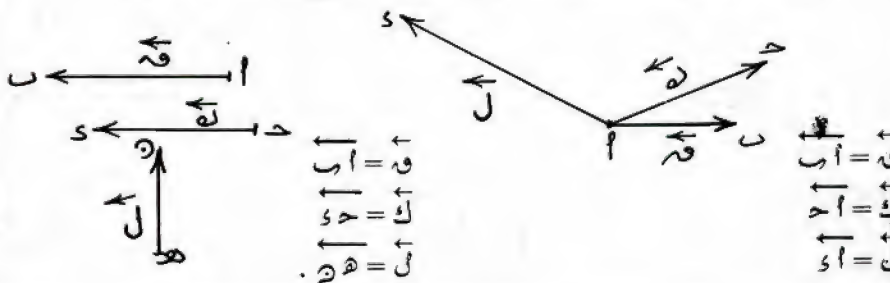
نقول إن الشعاع المعلوم 0 هو العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع في مجموعة أشعة المستوي .

• العنصر النظير : مهما يكن الشعاع ق فإن  $ق + (-ق) = (-ق) + ق = 0$  .

نقول إن الشعاعين ق و -ق متناظران بالنسبة لعملية الجمع في شـ .

أي أن لكل شعاع نظير وحيد بالنسبة لعملية الجمع في شـ هو معاكسه .

ارسم في كل من الشكلين الآتين مثلاً للشعاع ق + ك + ل .



## تمرين محلول

ا، ب، م، ح، د خمس نقط من المستقيم (س س') ، حيث م هي منتصف كل من القطعتين [ب ح] ، [د ا] . (الشكل)  
 - يبين أن  $\overrightarrow{اب} = \overrightarrow{دس}$  .



البرهان :

م منتصف [د ا] معناه  $م = ا = د$  .

و م منتصف [ب ح] معناه  $م = ب = ح$  .

إذن  $م - ا = م - ب = م - د = م - ح$  أي  $ا - ب = د - ح$  .

لكن الثنائية النقطية (ا، ب) تعين الشعاع  $\overrightarrow{اب}$  .

والثنائية النقطية (د، ح) تعين الشعاع  $\overrightarrow{دس}$  .

الشعاعان  $\overrightarrow{اب}$  ،  $\overrightarrow{دس}$  لهما نفس المنحى ونفس الاتجاه ونفس المعيار نستنتج أنها متساويان أي :

$$\overrightarrow{اب} = \overrightarrow{دس} .$$

## ضرب شعاع بعدد حقيقي

### 1. جداء شعاع بعدد حقيقي :

#### (1) تعريف :

• جداء شعاع غير معدوم  $\vec{v}$  بعدد حقيقي غير معدوم  $k$  هو الشعاع  $\vec{kv}$  الذي يكتب  $\vec{kv} = k \cdot \vec{v}$ .  $\vec{v}$  بحيث يكون للشعاعين  $\vec{v}$  و  $\vec{kv}$  نفس المنحى .

- نفس المنحى .  
- نفس الاتجاه إذا كان  $k$  موجباً ، واتجاهان مختلفان إذا كان  $k$  سالباً .

-  $\|\vec{kv}\| = |k| \cdot \|\vec{v}\|$  .

• إذا كان  $k \neq 0$  فإن  $\vec{0} = \vec{kv}$  .

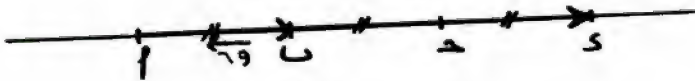
• إذا كان  $\vec{v} \neq \vec{0}$  فإن  $\vec{0} = k \cdot \vec{v}$  .

#### (2) أمثلة :

مثال 1 :  $\vec{v}$  شعاع ، لنعين الشعاع  $3\vec{v}$  .

- نختار ثنائية نقطية  $(A, B)$  بحيث  $\vec{AB} = \vec{v}$

ونعين على  $(A, B)$  نقطتين  $C, D$  بحيث يكون  $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{v}$  ( الشكل 8 )



الشكل 8

نستنتج أن  $\vec{AB} = \vec{BC} = \vec{CD} = \vec{DE} = \vec{v}$

وأن :  $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = 3\vec{v}$

نکتہ  $\overset{\leftarrow}{و} + \overset{\leftarrow}{و} + \overset{\leftarrow}{و} = 3\overset{\leftarrow}{و}$

إذن  $\vec{f} = 3\vec{u}$

الشعاع 3<sup>+</sup> هو جُداء العدد الحقيقي 3 والشعاع 3<sup>-</sup>.

هذا يعني أن الثنائية النقطية (أ، ب) تمثل الشعاع 3 و<sup>4</sup>.

لاحظ أن :

• للشعاعين  $\vec{e}$  ،  $3$  و  $\vec{e}$  نفس المنحى ونفس الاتجاه

$$\cdot \| \overset{\uparrow}{\text{ق}} \| 3 = \text{ق} \uparrow 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12 = \| \overset{\uparrow}{\text{ق}} 3 \| \cdot$$

**مثال 2 :**

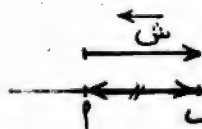
ش<sup>←</sup> شعاع بحيث ش<sup>←</sup> = ا<sup>←</sup> ، لنعين الشعاع - 5 ش<sup>←</sup> .

- نختار على (أب) النقط ح، د، هـ، و، بحيث يكون:

$$\overleftarrow{و} = \overleftarrow{ه} \text{ ز} = \overleftarrow{ز} \text{ ح} = \overleftarrow{ح} \text{ ح} = \overleftarrow{ح} \text{ ح} = \overleftarrow{ح} \text{ ح}$$

لدينا  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AS}$  أي  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OS}$

لكن  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$   $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$   $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$



### الشكل 9

فالثنائية النقطية (و، ١) تمثل الشعاع - 5 ش<sup>+</sup> الذي هو جداء العدد الحقيقي - 5

والشعاع ش<sup>←</sup>.

لاحظ أن :

• للشعاعين ش<sup>←</sup>، - 5 ش<sup>←</sup> نفس المنحى واتجاهان متعاكسان .

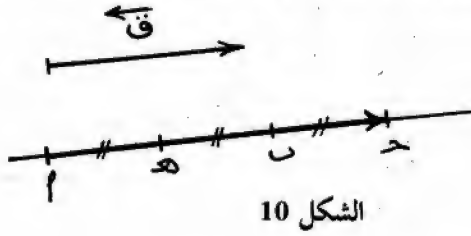
• وأن :  $\|5 - \text{ش}\| = \|5 - \text{ش}\|$  .

مثال 3 :  $\omega$  شعاع ، لنعين الشعاع  $\frac{3}{2}\omega$ .

- نختار ممثلاً  $(f, g)$  للشعاع  $\overrightarrow{v}$  فيكون  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f}$



ونعين على المستقيم (أ ب) نقطتين هـ ، ح بحيث أ هـ = هـ ب = ب ح



نستنتج أن :

$$\frac{3}{2} \overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{أ ح}$$

لاحظ أن :

• للشعاعين  $\overrightarrow{أ ح}$  ،  $\overrightarrow{أ ب}$  نفس المنحى ونفس الاتجاه .

• ولدينا  $\|\overrightarrow{أ ح}\| = \|\overrightarrow{أ ب}\| \cdot \frac{3}{2}$  .

فالشعاع  $\overrightarrow{أ ح}$  هو جداء العدد الحقيقي  $\frac{3}{2}$  والشعاع  $\overrightarrow{أ ب}$  .

$$\overrightarrow{أ ح} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{أ ب} = \overrightarrow{أ ب} \cdot \frac{3}{2}$$

إن الثنائية (أ ، ح) تمثل الشعاع  $\overrightarrow{أ ب} \cdot \frac{3}{2}$  :

ملاحظة : الثنائية النقطية (أ ، ح) تمثل الشعاع  $\overrightarrow{أ ب} \cdot \frac{3}{2}$

$$\overrightarrow{أ ح} = \overrightarrow{أ ب} \cdot \frac{3}{2}$$

(1) عيّن في المثال 1 ممثلاً للشعاع  $\overrightarrow{أ ب} \cdot 3$  .

(2)  $\overrightarrow{أ ب} \cdot 4$  ،  $\overrightarrow{أ ب} \cdot \frac{3}{5}$  ،  $\overrightarrow{أ ب} \cdot \frac{2}{5}$  .

### 3) ضرب شعاع بعدد حقيقي وخواصه :

- رأيت أن جداء شعاع بعدد حقيقي هو شعاع .  
التطبيق الذي يرفق كل ثنائية مرتبة (ك ، ش) من  $\mathbb{R} \times \mathcal{S}$  بالجداء ك ش .  
يسمى ضرب شعاع بعدد حقيقي .
- نقبل أن ضرب شعاع بعدد حقيقي له الخواص الآتية :

مهما يكن العددان الحقيقيان س ، ع ومهما يكن الشعاعان ق ، ش فإن :

$$\star (س + ع) ش = س ش + ع ش$$

$$\star س (ع ش) = (س ع) ش$$

$$\star س (ش + ق) = س ش + س ق$$

$$\text{لدينا } ش - ش = ش (1 - 1)$$

ملاحظة :

ك عدد حقيقي و ش شعاع .

$$ك ش = ش \text{ يعني أن } 0 = ك \text{ أو } ش = \vec{0}$$

### 2. توازي شعاعين :

- ق شعاع غير معدوم ، ك عدد حقيقي غير معدوم .  
تعلم من تعريف جداء شعاع بعدد حقيقي أن للشعاعين ق ، ك ق  
نفس المنحى ، نقول إن الشعاعين ق و ك ق متوازيان ونكتب ق // ك ق

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{ق} \\ \overleftarrow{ك ق} \\ ك > 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{ق} \\ \overrightarrow{ك ق} \\ ك < 0 \end{array}$$

تعريف :

الشعاعان المتوازيان هما شعاعان لهما نفس المنحى

نقبل أن الشعاع المعلوم  $\vec{O}$  يوازي كل شعاع  $\vec{S}$ .

نتيجة 1 :

و. ش شعاعان متوازيان يعني أنه يوجد عدد حقيقي  
وحيد غير معدوم  $k$  بحيث  $\vec{O} = k \vec{S}$

نكتب  $\vec{O} // \vec{S}$ .

ملاحظات :

- 1) الشعاعان المتساويان هما شعاعان متوازيان .
- 2) الشعاعان المتعاكسان هما شعاعان متوازيان .
- 3) إذا كانت  $A, B, C$  ثلاث نقط على استقامة واحدة .

فتكون-مثلا- الأشعة  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  متوازية  
أي  $\vec{AB} // \vec{AC}, \vec{AC} // \vec{AD}$   
- اذكر أشعة أخرى متوازية .

لنبرهن على النظرية الآتية :

$A, B, C$  ثلاث نقط على استقامة واحدة يعني أنه يوجد عدداً حقيقيين  
غير معدومين معاً  $s, c$  بحيث :  
 $\vec{AC} = s \vec{AB} + c \vec{AD}$   
 $\vec{0} = \vec{AC} + \vec{AD}$

## البرهان :



1) نفرض أن النقط  $أ$  ،  $ب$  ،  $ج$  على استقامة واحدة  
- ولنبرهن على وجود عددين حقيقيين غير معدومين معاً بحيث :

$$س \cdot \overrightarrow{أب} + ع \cdot \overrightarrow{أج} = \vec{0}$$

- بما أن النقط  $أ$  ،  $ب$  ،  $ج$  على استقامة واحدة فإن :

الشعاعين  $\overrightarrow{أب}$  ،  $\overrightarrow{أج}$  متوازيان وهذا يعني أنه يوجد عدد حقيقي وحيد غير معدوم  $ك$  بحيث :

$$\overrightarrow{أب} = ك \cdot \overrightarrow{أج}$$

$$\text{ومنه } \overrightarrow{أب} - ك \cdot \overrightarrow{أج} = \vec{0} \text{ أي } 1 \cdot \overrightarrow{أب} + (-ك) \cdot \overrightarrow{أج} = \vec{0}$$

نضع  $س = 1$  ،  $ع = -ك$  فيكون :

$$س \cdot \overrightarrow{أب} + ع \cdot \overrightarrow{أج} = \vec{0}$$

2) نفرض أنه يوجد عدداً حقيقيين  $س$  ،  $ع$  غير معدومين معاً بحيث :

$$س \cdot \overrightarrow{أب} + ع \cdot \overrightarrow{أج} = \vec{0}$$

ولنبرهن أن النقط  $أ$  ،  $ب$  ،  $ج$  على استقامة واحدة .

$$\text{- بما أن } س \cdot \overrightarrow{أب} + ع \cdot \overrightarrow{أج} = \vec{0}$$

$$\text{فإن } س \cdot \overrightarrow{أب} = -ع \cdot \overrightarrow{أج}$$

نفرض أن أحد العددين مثلاً  $س$  غير معدوم ، فنجد :

$$\overrightarrow{أب} = -\frac{ع}{س} \cdot \overrightarrow{أج}$$

$$\text{نضع } ك = -\frac{ع}{س} \text{ فيكون } \overrightarrow{أب} = ك \cdot \overrightarrow{أج}$$

وهذا يعني أن الشعاعين  $\overrightarrow{أب}$  ،  $\overrightarrow{أج}$  متوازيان

فالنقط  $أ$  ،  $ب$  ،  $ج$  على استقامة واحدة .



## مسألة محلولة

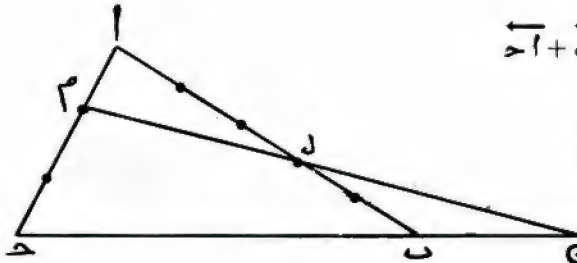
أ ب ح مثلث ، ل ، م ، د ثلاث نقط بحيث :

$$\overrightarrow{AL} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

(1) عبّر عن كل من الأشعة  $\overrightarrow{AD}$  ،  $\overrightarrow{AM}$  ،  $\overrightarrow{AL}$  بدلالة  $\overrightarrow{AB}$  ،  $\overrightarrow{AC}$

(2) بيّن أن النقط ل ، م ، د على استقامة واحدة .

البرهان :



$$(1) \quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

$$(2) \quad \text{لدينا : } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

$$\left(\frac{3}{2} - \right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{2} - \right) \times \left(\frac{3}{5} - \right) = \frac{9}{10}$$

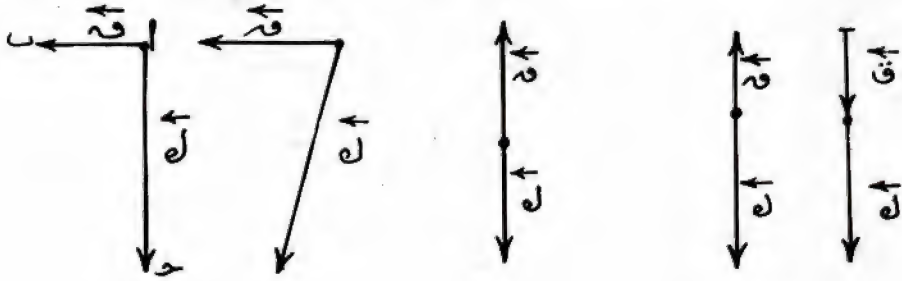
$$\text{نستنتج أن } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AL}$$

فالنقط ل ، م ، د على استقامة واحدة .

## تمارين

1.  $a, b, c$  ثلاث نقط من مستقيم  $(c)$ .  
عَيِّن النقطة  $h$  في الحالات الآتية :  
 (1) الثنائية النقطية  $(a, h)$  تمثل الشعاع  $\overrightarrow{ba}$ .  
 (2) الثنائية النقطية  $(a, h)$  تمثل الشعاع  $\overrightarrow{ab}$ .  
 (3) الثنائية النقطية  $(a, h)$  تمثل الشعاع  $\overrightarrow{ac}$ .
2.  $a, b$  نقطتان من مستقيم  $m$  منتصف  $[ab]$ .  
عَيِّن النقطة  $h$  في الحالات الآتية :  
 (1) الثنائية النقطية  $(m, h)$  تمثل الشعاع  $\overrightarrow{ma}$ . عَيِّن في هذه الحالة الشعاع  $\overrightarrow{ah}$ .  
 (2) الثنائية النقطية  $(a, h)$  تمثل الشعاع  $\overrightarrow{ma}$ . بَيِّن في هذه الحالة أن :  $\overrightarrow{ba} = \overrightarrow{mh}$  وأن  $\overrightarrow{ah} = -\overrightarrow{mb}$ .
3.  $a, b, c$  مثلث .  
 (1) عَيِّن النقط  $h_1, h_2, h_3$  بحيث  
 الثنائية النقطية  $(b, h_1)$  تمثل الشعاع  $\overrightarrow{ac}$ .  
 الثنائية النقطية  $(b, h_2)$  تمثل الشعاع  $\overrightarrow{ab}$ .  
 الثنائية النقطية  $(b, h_3)$  تمثل الشعاع  $\overrightarrow{ca}$ .  
 (2) ما نوع كل من الرباعيات  $ab h_1 c, b c h_1 h_2, a c b h_3$  ؟  
 (3) استنتج أن الرباعي  $a h_1 h_2 h_3$  متوازي أضلاع.
4.  $a, b, c, d$  شعاعان متساويان .  
بَيِّن أن الشعاعين  $\overrightarrow{ac}, \overrightarrow{bd}$  متساويان .
5.  $(a, b)$  ثنائية نقطية غير معدومة (أي  $a$  و  $b$  مختلفتان)  
 (1) عِلِّم نقطتين  $c, d$  بحيث يكون الشعاع  $\overrightarrow{ad}$  هو مجموع الشعاعين  $\overrightarrow{ab}$  و  $\overrightarrow{ac}$ .  
 (2) عِلِّم النقطتين  $c, d$  بحيث يكون :  $a = a + b = c + d$  و  $(a) \perp (c)$ .

6. عَيِّن في كل حالة الشعاع  $\vec{q}$  +  $\vec{e}$  ( الأشكال الآتية ) :



$$|\vec{q}| > |\vec{e}| \quad |\vec{q}| = |\vec{e}| \quad (\vec{q}) \perp (\vec{e})$$

7.  $\vec{q}$ ،  $\vec{e}$ ،  $\vec{r}$  ثلاثة أشعة بحيث  $\vec{q} + \vec{e} = \vec{r}$  بين أن  $\vec{q} = \vec{e}$ .

8.  $\vec{q}$ ،  $\vec{e}$ ،  $\vec{r}$  ثلاثة أشعة حيث :  $\vec{q} = \vec{a}$ ،  $\vec{e} = \vec{b}$ ،  $\vec{r} = \vec{c}$  عَيِّن ممثلاً للشعاع  $\vec{q} + \vec{e} + \vec{r}$  في كل من الحالتين :  
(1)  $\vec{q} = -\vec{e}$ .

(2) قارن بين  $\|\vec{q} + \vec{e}\|$  و  $\|\vec{q} + \vec{r}\|$ .

إذا كان  $\vec{q} = -\vec{e}$  و  $(\vec{a}) \perp (\vec{b})$

9.  $\vec{a}$   $\vec{b}$   $\vec{c}$  مثلث .

(1) ارسم ممثلاً للشعاع  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

(2) عَيِّن نقطة  $\vec{r}$  بحيث  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{r} = \vec{0}$ .

10.  $\vec{a}$   $\vec{b}$   $\vec{c}$  متوازي أضلاع .

(1) برهن أن  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$

(2) استنتج أن  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .

11.  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$ ،  $\vec{c}$ ،  $\vec{d}$  أربع نقط من المستوي ، برهن صحة المساويات الآتية :

$$(1) \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$$

$$(2) \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$(4) \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$$

$$12. \quad A, B, C, D \text{ أربع نقط بـحيث } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$(1) \quad \text{برهن أن } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$(2) \quad \text{برهن أن } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

$$13. \quad A, B, C \text{ مثلث. ث مركز ثقله و 'أ' منتصف الضلع } [BC].$$

$$(1) \quad \text{أنشئ ممثلاً مبدأه ث للشعاع } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

$$(2) \quad \text{برهن أن : } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$14. \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ شعاع، ارسم ممثلاً له (أ، ب، ج).}$$

ثم ارسم ممثلاً مبدأه أ لكل من الأشعة :

$$\vec{a} - \vec{b} ; \vec{b} - \vec{c} ; \vec{c} - \vec{a}$$

$$15. \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ شعاعان بين أن الشعاعين :}$$

$$\left[ (\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{c}) \right] \text{ و } \left[ (\vec{a} - \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{a}) \right]$$

متعاكسان .

$$16. \quad A, B, C \text{ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.}$$

$$(1) \quad \text{أنشئ ممثلاً لكل من الأشعة الآتية :}$$

$$\vec{a} - \vec{b} ; \vec{b} - \vec{c} ; \vec{c} - \vec{a} ; \vec{a} + \vec{b} ; \vec{b} + \vec{c} ; \vec{c} + \vec{a}$$

$$(2) \quad \text{عبر بواسطة الشعاعين } \vec{a}, \vec{b} \text{ عن المجموع } \vec{a} + \vec{b}$$

$$17. \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ شعاعان بحيث :}$$

$$\vec{0} = (\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{a})$$

بين أن الشعاعين  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  متساويان .



18. و، لہ شعاعان غیر معدومین، س، ع عددان حقیقیان بحیث :

$$\vec{0} = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3) + (\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$

بين أن العديدين سوع يحققان العلاقة :

$$s = 1 - \epsilon.$$

19. وَ لَکُمْ شُعَاعَانِ مَتَعَاکِسَانِ ؛ س ، ع عددان حقیقیان .

أوجد العلاقة بين س ، ع لكي يكون :

$$0 = (\overset{\leftarrow}{\text{س}} - \overset{\leftarrow}{\text{ق}}) 3 + (\overset{\leftarrow}{\text{ق}} - \overset{\leftarrow}{\text{ل}}) \text{ع} - (\overset{\leftarrow}{\text{س}} + 2 \overset{\leftarrow}{\text{ع}} - \overset{\leftarrow}{\text{ل}})$$

20. أ، ب، ج، د أربع نقط ، كل ثلاث منها ليست على استقامة واحدة ، ه منتصف

[أب] ، ه منتصف [حز] .

بَيْنَ أَنْ :

$$\vec{h}_2 = \vec{u} - \vec{f} - \vec{s} + \vec{p} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{h_2} = \overrightarrow{h_1} + \overrightarrow{s_1} \quad (3)$$

21. ا، ب، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

(1- عین النقطة م بحيث  $\overleftarrow{a} = \overleftarrow{a} + \overleftarrow{a} = \overleftarrow{a} + \overleftarrow{a} = \overleftarrow{a}$  .

(2) عبر عن كل من الشعاعين  $\overrightarrow{AM}$  ،  $\overrightarrow{BH}$  بواسطة الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  ،  $\overrightarrow{AC}$ .

(3) بين أن م هي منتصف القطعة [م ح].

22. ا، ب، ج ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة.

و، ل، لی، ثلاثة أشعة بحيث :

$$\frac{\overleftarrow{2\sqrt{2}}}{2} - \overleftarrow{2\sqrt{2}} = \overleftarrow{3}, \quad \frac{\overleftarrow{3}}{4} - \overleftarrow{\frac{1}{2}} = \overleftarrow{2}, \quad \overleftarrow{3} + \overleftarrow{1} = \overleftarrow{2}$$

(1) عبر بدلالة الشعاعين  $\vec{a}$ ،  $\vec{b}$  عن كل من الأشعة الآتية :

$$(\bar{\psi} + \bar{\psi}) 2\sqrt{t}; \sqrt{t} 2\sqrt{t} + \bar{\psi} + \bar{\psi}, (\bar{\psi} + \bar{\psi}) 2-; \sqrt{t} + \bar{\psi} + \bar{\psi}, \bar{\psi} + \bar{\psi}$$

2) بَيِّنْ أَنْ كِلَا مِّنَ الْأَشْعَةِ الْوَارِدَةِ فِي السُّؤَالِ السَّابِقِ يَوَازِي الشَّعَاعَ - 2 (ق + ل + هـ) .

23. أ : ب . ح ثلاث نقط بحيث  $\overrightarrow{2\text{ح} + 3\text{ب}} = \overrightarrow{0}$  ،  $\overrightarrow{\text{ح}} \neq \overrightarrow{0}$  .  
عين العدد الحقيقي س بحيث :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{\text{ح}}(1 - س 2) + \overrightarrow{\text{أ}}(2\sqrt{1} + 1)$$

24. م ب ح مثلث ، أ نقطة بحيث  $\overrightarrow{\text{أ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{ح} - \text{م}}$  .

د منتصف [م ب] ، ه منتصف [أ ب] .

(1) عبّر عن الشعاع د ه بدلالة الشعاع أ م .

(2) بيّن أن الثنائيتين النقطيتين (أ ، ح) ، (د ، ه) تمثلان نفس الشعاع .

(3) نرفق كل نقطة ه من المستوي بالشعاع ق ه حيث :

$$\overrightarrow{\text{ق}} = \overrightarrow{\text{ه}} + \overrightarrow{\text{ب}} - 2\overrightarrow{\text{د}} .$$

عبّر عن الشعاع ق ه بدلالة الشعاع ح ه .

25. أ ب ح مثلث . د نقطة بحيث  $\overrightarrow{\text{أ}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}})$  ؛ أ' هي منتصف [ب ح] .

(1) بيّن أن :  $\overrightarrow{\text{أ}} 3 = \overrightarrow{\text{أ}} 2 = \overrightarrow{\text{أ}} 1$  ثم استنتج أن د  $\in$  (أأ') .

(2) بيّن أن :  $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{د}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{0}$  . واستنتج أن :

$$\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{د}} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}) ; \overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{د}} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}})$$

(3) برهن أنه من أجل كل نقطة م من المستوي فإن :

$$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}} = 3\overrightarrow{\text{م}} .$$

(4) اكتب العلاقة  $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{م}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}} = 3\overrightarrow{\text{م}}$  في كلّ من الحالات الآتية :

$$\text{م} = \text{أ} ; \text{م} = \text{ب} ; \text{م} = \text{ح} ; \text{م} = \text{د} ; \text{م} = \text{أ}' .$$

1. الجذر التربيعي التام لعدد حقيقي موجب :

لاحظ أن :  $9 = 3^2$  وأن  $9 = 3^2$  إذن  $9 = 3^2$  و  $9 = 3^2$

لاحظ أيضًا أن :  $\frac{25}{49} = \left(\frac{5}{7}\right)^2$  ؛  $\frac{25}{49} = \left(\frac{5}{7}\right)^2$  إذن

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^2$$

و  $1,44 = 1,2^2$  ،  $1,44 = 1,2^2$  إذن  $1,44 = 1,2^2$  و  $1,44 = 1,2^2$

إذن  $2 = 2^2$  ،  $2 = 2^2$  إذن  $2 = 2^2$  و  $2 = 2^2$

بصفة عامة :

مهما يكن العدد الحقيقي  $a$  ، فإن  $a^2 = (a^+)^2 = (a^-)^2$

• كل من  $\frac{5}{7} +$  و  $\frac{5}{7} -$  مربعه  $\frac{25}{49}$

العدد الحقيقي الموجب  $\frac{5}{7} +$  يسمى الجذر التربيعي التام للعدد الحقيقي الموجب  $\frac{25}{49}$

$$\frac{5}{7} + = \sqrt{\frac{25}{49}}$$

• أيضًا كل من  $2\sqrt{+}$  و  $2\sqrt{-}$  مربعه 2 .

العدد الحقيقي الموجب  $2\sqrt{+}$  يسمى الجذر التربيعي التام للعدد الحقيقي الموجب 2 .

تعريف :

1 عدد حقيقي موجب .  
الجذر التربيعي التام للعدد 1 هو العدد الحقيقي الموجب  $a$  بحيث  $a^2 = 1$

نكتب :  $\sqrt{1} = a$  .

أمثلة :  $3 = \sqrt{9}$  ،  $\frac{7}{5} = \sqrt{\frac{49}{25}}$  ،  $1,3 = \sqrt{1,69}$  .

ملاحظات هامة :

(1)  $0 = \sqrt{0}$  ،  $1 = \sqrt{1}$  .

(2) العدد الحقيقي السالب ليس له جذر تربيعي في  $\mathbb{R}$  .

(3) كل قيمة تقريبية للعدد الأصم  $\sqrt{2}$  ليست جذراً تربيعياً تاماً للعدد 2 لأن مربع أي قيمة تقريبية للعدد  $\sqrt{2}$  لا يساوي 2 .  
مثلاً :

العدد 1,41 هو القيمة المقربة بالنقصان إلى  $\frac{1}{10}$  للعدد  $\sqrt{2}$

لكن  $(1,41)^2 \neq 2$  ، فالعدد 1,41 ليس جذراً تربيعياً تاماً للعدد 2 .

## 2. الجذر التربيعي والقيمة المطلقة :

مثال : تعلم أن  $25 = (5 +)^2$

إذن  $5 + = \sqrt{25} = \sqrt{(5 +)^2}$

وأيضاً  $25 = (5 -)^2$

إذن  $5 + = \sqrt{25} = \sqrt{(5 -)^2}$

لكن  $|5 -| = 5 +$

إذن  $|5 -| = \sqrt{(5 -)^2}$



وبصفة عامة :

مهما يكن العدد الحقيقي  $f$  فإن :

$$|f| = \sqrt[2]{f^2}$$

هذا يعني أن :  $\sqrt[2]{f} = f$  إذا كان  $f \geq 0$ .

$\sqrt[2]{f} = -f$  إذا كان  $f < 0$ .

(1) بالإستعانة بجدول المربعات عيّن كلاً من :

$$\sqrt[2]{196} ; \sqrt[2]{256} ; \sqrt[2]{225} ; \sqrt[2]{9409}$$

(2) عيّن كلاً من :

$$\sqrt[2]{(5-)} ; \sqrt[2]{(6+)} ; \sqrt[2]{(6-)} ; \sqrt[2]{\left(\frac{3-}{4}\right)}$$

(3) أكمل الجدول :

جذره التربيعي		3600	....	81	....	15	مربعه
	11025	...	784	...	729		

3. استخراج الجذر التربيعي التام لعدد حقيقي موجب .

• مثال 1 : لنحسب  $\sqrt[2]{518400}$  .

$$\text{لدينا } 100 \times 5184 = 518400$$

$$\text{جدول المربعات يبيّن أن } 5184 = 72^2 .$$

$$\text{ونعلم أن } 100 = 10^2$$

نستنتج أن :

$$518400 = 72^2 \times 10^2 = (72 \times 10)^2$$

$$\text{إذن : } \sqrt[2]{518400} = \sqrt[2]{(72 \times 10)^2} = 720$$

إن العدد 720 هو الجذر التربيعي التام للعدد 518400 .

• مثال 2 : لنحسب  $\sqrt{\frac{225}{121}}$  :

$$\left(\frac{15}{11}\right)^2 = \frac{15^2}{11^2} = \frac{225}{121} \text{ لدينا}$$

$$\frac{15}{11} = \sqrt{\left(\frac{15}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{121}} \text{ إذن}$$

فالعدد  $\frac{15}{11}$  هو الجذر التربيعي التام للعدد  $\frac{225}{121}$ .

• مثال 3 : لنحسب  $\sqrt{26,01}$ .

$$\frac{2601}{100} = 26,01 \text{ تعلم أن}$$

$$\frac{2601}{100} = 26,01 \text{ إذن } 2601 = 26,01 \times 100$$

$$5,1 = \frac{17 \times 3}{10} = \sqrt{\left(\frac{17 \times 3}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{2601}{100}} = \sqrt{26,01} \text{ نستنتج أن}$$

$$\text{إذن } 5,1 = \sqrt{26,01}.$$

• توجد طرق أخرى لإيجاد الجذر التربيعي التام لعدد حقيقي موجب ، أو إيجاد قيمة مقربة له كما يظهر في المثال التالي :

• مثال 4 : لحساب الجذر التربيعي للعدد 35836 أو لحساب قيمة مقربة له تتبع الطريقة التالية :

1) نجزئ هذا العدد من اليمين إلى اليسار إلى أقسام ، كل قسم يتكون من رقمين فنجد  $\overline{3} \overline{58} \overline{36}$  .

2) نبحث عن عدد موجب  $h$  بحيث  $h^2 \geq 3$  ،  
فنجد  $\boxed{1=h}$  لأن  $1^2 < 3$  .

3) نأخذ ضعف واحد وهو 2 ، ثم نبحث عن رقم  $h$  بحيث :

$\overline{3} \overline{58} \overline{36}$	189
- 1	$h \times h \geq 258$ .
	نجد بالتجريب أن $\boxed{8=h}$

$\overline{2} \overline{58}$	$h \times h \geq 2$
- 2 24	$28 \times 8 = 224$

4) نأخذ ضعف العدد 18 وهو 36 .  
ثم نبحث عن رقم  $h$  بحيث :  
 $h \times h \geq 3436$  .

$\overline{34} \overline{36}$	$h \times h \geq 36$
- 3321	$369 \times 9 = 3321$

نجد أن  $\boxed{9=h}$   
إن  $3321 = 369 \times 9$  .  
ولدينا  $115 = 3321 - 3436$  .

115	
-----	--

يمكن أن نتحقق أن :  
 $35836 = 115 + (189)^2$

• العدد 189 يسمى القيمة المقربة بالنقصان إلى الوحدة للعدد  $\sqrt{35836}$  .  
والعدد 115 يسمى باقي « عملية استخراج » الجذر التربيعي المقرب بالنقصان إلى الوحدة للعدد 35836 .

إذا أردنا مواصلة هذه العملية ، أي إيجاد مثلاً الجذر التربيعي المقرب إلى  $\frac{1}{10}$  للعدد 35836 ، فإننا :

(1) نضع صفرين عن يمين الباقي 115 فنجد العدد 11500 .

(2) نضع فاصلة عن يمين العدد 189 .

(3) نأخذ ضعف العدد 189 وهو 378 .

(4) نبحث عن رقم  $ل$  بحيث :  $ل \times ل \geq 11500$  .

نجد بالتجريب أن  $ل = 3$  .

• العدد 189,3 هو القيمة المقرّبة بالتقصان إلى  $\frac{1}{10}$  للعدد  $\sqrt{35836}$  .

5. نأخذ ضعف العدد 1893 وهو 3786 ثم نبحث عن رقم  $ك$  بحيث :

$\begin{array}{r} \overline{35836} \\ - 1 \end{array}$	$189,30$	$ك \times ك \geq 3786$ . 15100
$\begin{array}{r} \overline{35836} \\ - 1 \end{array}$	$ك = 0$	فنجد أن

$\begin{array}{r} \overline{258} \\ - 224 \end{array}$	$2ه \times ه$ $28 \times 8 = 224$
$\begin{array}{r} 3436 \\ - 3321 \end{array}$	$36ق \times ق$ $369 \times 9 = 3321$
$\begin{array}{r} \overline{115,00} \\ - 113,49 \end{array}$	$378ل \times ل$ $3783 \times 3 = 11349$
$\begin{array}{r} 1,5100 \\ 00000 \end{array}$	$ك \times ك \geq 3786$ $37860 \times 0 = 0$
$1,5100$	



• العدد 189,30 هو القيمة المقربة بالنقصان إلى  $\frac{1}{100}$  للعدد  $\sqrt{35836}$ .

يمكن مواصلة هذه العملية لإيجاد قيم مقربة أكثر فأكثر للجذر التربيعي للعدد 35836.

• لاحظ أن :  $189,3^2 = 35836$  .

نكتب  $\sqrt{35836} \simeq 189$  ونقرأ الجذر التربيعي للعدد 35836 يساوي 189 بتقريب وحدة بالنقصان .

وأيضاً نكتب  $\sqrt{35836} \simeq 189,3$  ونقرأ الجذر التربيعي للعدد 35836 يساوي

189,3 بتقريب  $\frac{1}{10}$  بالنقصان .

ونكتب  $\sqrt{35836} \simeq 189,30$  ونقرأ الجذر التربيعي للعدد 35836 يساوي

189,30 بتقريب  $\frac{1}{210}$  بالنقصان .

• العدد الحقيقي 1,51 هو باقي الجذر التربيعي المقرب بالنقصان إلى  $\frac{1}{210}$  للعدد

35836.

مثال 5 : لنحسب الجذر التربيعي التام للعدد 18225 بالطريقة السابقة .

نجد أن :  $\sqrt{18225} = 135$

تحقق أن :  $18225 = 135^2$  .

إن باقي عملية استخراج الجذر التربيعي للعدد 18225 يساوي الصفر فالعدد 18225 هو مربع تام .

يمكن أن نستنتج ما يلي :

باقي عملية إيجاد الجذر التربيعي لمربع تام يساوي الصفر.

(1) أوجد الجذر التربيعي المقرب بالنقصان إلى  $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$  لكل من الأعداد الموجبة

التالية : 7 ؛ 10 ؛ 13 .

(2) أوجد الجذر التربيعي المقرب بالنقصان إلى  $\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$  لكل من :

81412 ؛ 79465 ؛ 471229 .

### الحسابات على الجذور التربيعية

#### 1. الجذر التربيعي لجداء :

مسألة 1 : أ ، ب عددا حقيقيان موجبان .

لنبرهن أن  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  .

نضع  $\sqrt{a} = c$  ،  $\sqrt{b} = s$  .

فيكون  $a = c^2$  ،  $b = s^2$  .

ونستنتج أن :  $a^2 = c^4$  ،  $b^2 = s^4$  .

بما أن  $a$  موجب و  $b$  موجب فإن  $a$  موجب أي :  $a^2 = c^4$  موجب

(  $a^2 = c^4$  )

(  $a^2 = c^4$  ) يعني أن  $a = c^2$  .

وبما أن  $a = c^2$  و  $b = s^2$  .

فإن  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$  أو  $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

أمثلة :  $\sqrt{15} = \sqrt{5 \times 3} = \sqrt{5} \times \sqrt{3}$  .

$\sqrt{6} = \sqrt{36} = \sqrt{18 \times 2} = \sqrt{18} \times \sqrt{2}$  .

$\sqrt{6} = \sqrt{36} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{12} \times \sqrt{3}$  .

مسألة 2 : لنبرهن على النتيجة التالية :

إذا كان  $f$  ،  $b$  عددين حقيقيين موجبين فإن :

$$\sqrt[2]{f} = \sqrt[2]{b}$$

البرهان :

$f$  ،  $b$  عددان حقيقيان موجبان .

نعلم من المسألة السابقة أن :  $\sqrt[2]{b} \times \sqrt[2]{f} = \sqrt[2]{bf}$  .

ونعلم أن  $f = |f| = \sqrt[2]{f} \times \sqrt[2]{f}$  لأن  $f$  موجب .

$$\text{إذن } \sqrt[2]{f} = \sqrt[2]{b}$$

$$\bullet \text{ أمثلة : } \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{2 \times \frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2 \times 9} = \sqrt[2]{18}$$

$$\bullet \sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{3 \times 25} = \sqrt[3]{3 \times 25} = \sqrt[3]{3} \times (\sqrt[3]{25}) = \sqrt[3]{3} \times 5$$

$$\bullet \sqrt[2]{14} = \sqrt[2]{2 \times 7} = \sqrt[2]{2 \times 7 \times 2} = \sqrt[2]{49 \times 2} = \sqrt[2]{98}$$

ملاحظة :  $f$  عدد حقيقي موجب .

$$f = \sqrt[2]{f} \times \sqrt[2]{f} = (\sqrt[2]{f})^2$$

$$\bullet \text{ مثلاً : } 5 = \sqrt[2]{5} \times \sqrt[2]{5} \quad 3 = (\sqrt[2]{3})^2$$

$$\bullet \text{ أمثلة : } \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{7 \times \frac{3}{7}} = \sqrt[3]{7 \times 9} = \sqrt[3]{63}$$

$$\bullet \sqrt[10]{3} = \sqrt[10]{5 \times 2} = \sqrt[10]{5 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[10]{90}$$

$$\bullet \sqrt[2]{2 \times 3} = \sqrt[2]{3 \times 2 \times 3} = \sqrt[2]{12 \times 3} = \sqrt[2]{12} \times \sqrt[2]{3}$$

$$\text{إذن } 18 = 2 \times 3 = \sqrt[2]{12} \times \sqrt[2]{27}$$

$$\bullet \text{ أيضًا } \sqrt[2]{2 \times 3} \times \sqrt[2]{3 \times 3} = \sqrt[2]{4 \times 3} \times \sqrt[2]{9 \times 3} = \sqrt[2]{12} \times \sqrt[2]{27}$$

$$\bullet 18 = 3 \times (2 \times 3) = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{12} \times \sqrt[3]{27}$$

يمكن أن نكتب :  $(\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3})^2 \times 3 = \sqrt[3]{3}^2 \times \sqrt[3]{3}^3$

$$^2 \left( \sqrt[3]{3} \right) \times 6 = \sqrt[3]{3}^2 \times \sqrt[3]{3}^3$$

$$. 18 = 3 \times 6 = \sqrt[3]{3}^2 \times \sqrt[3]{3}^3$$

(1) اكتب على شكل جداء عدد ناطق وعدد أصم كلاً مما يلي :

$$. \sqrt[3]{180} ; \sqrt[3]{80} ; \sqrt[3]{75} ; \sqrt[3]{63} ; \sqrt[3]{40} ; \sqrt[3]{32}$$

(2) اكتب على أبسط شكل ممكن كلا من الجداءات التالية :

$$. \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{3}^2 ; \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{3} - ; \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2}$$

$$. \frac{\sqrt[3]{5}}{6} \times \frac{\sqrt[3]{5}}{3} ; \sqrt[3]{32} \times \frac{1}{2} ; \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2}^5$$

(2) - الجذر التربيعي لحاصل قسمة .

مسألة : 1 ، ب عدنان حقيقيان موجبان و  $0 \neq$

$$. \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1}} \text{ لنبرهن أن } \sqrt[3]{\frac{1}{1}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1}}$$

البرهان : نعلم أن :  $(\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \text{ معناه } 1 = 1)$

وأن :  $(\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1} \text{ معناه } 1 = 1)$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \text{ نستنتج أن } \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$

$$. \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{1} \text{ وهذا يعني أن } \frac{1}{1} = \left( \frac{1}{1} \right)^2 \text{ أو } \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$$



وبما أن  $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot m]{a^m}$  .

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a} \quad \text{إذن}$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m}} \quad \text{أو}$$

أمثلة :

$$\frac{13}{20} = \frac{\sqrt[2]{13}}{\sqrt[2]{20}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{400}} = \frac{\sqrt{169}}{400} \sqrt{\quad} ; \quad \frac{7}{6} = \frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{36}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{36} \sqrt[3]{\quad}$$

$$\frac{3}{7} \sqrt[3]{\quad} = \frac{\sqrt[3]{15}}{35} \sqrt[3]{\quad} = \frac{\sqrt[3]{15}}{35} \sqrt[3]{\quad}$$

$$0,62 = \frac{62}{100} = \frac{\sqrt[4]{3844}}{\sqrt[4]{10000}} = \frac{\sqrt[4]{3844}}{10000} \sqrt[4]{\quad} = 0,3844 \sqrt[4]{\quad} .$$

$$\frac{\sqrt[7]{5}}{14} = \frac{\sqrt[7]{5} \times \sqrt[7]{25}}{14} = \frac{\sqrt[7]{5 \times 25}}{\sqrt[2]{14}} = \frac{\sqrt[7]{175}}{\sqrt[2]{196}} = \frac{\sqrt[7]{175}}{196} \sqrt[2]{\quad} .$$

تطبيق : لنحسب الجذر التربيعي المقرب بالنقصان إلى  $\frac{1}{10}$  للعدد 27,594 .

$$\frac{27594}{310} = 27,594 \quad \text{نعلم أن :}$$

$$( \text{حيث جعلنا أس المقام زوجيا} ) \quad \frac{275940}{410} = 27,594$$

$$\frac{\sqrt[4]{275940}}{\sqrt[4]{10}} = \frac{\sqrt[4]{275940}}{\sqrt[4]{10}} \sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{27,594} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{\sqrt[4]{275940}}{\sqrt[2]{10}} = \sqrt[4]{27,594}$$

$$525 \simeq \sqrt[4]{275940} \quad \text{وبما أن}$$

$$\frac{525}{\sqrt[2]{10}} \simeq \sqrt[4]{27,594} \quad \text{إذن}$$

$$5,25 \simeq \sqrt[4]{27,594} \quad \text{أي}$$

5,25 هو الجذر التربيعي للعدد 27,594 بتقريب  $\frac{1}{\sqrt[2]{10}}$  بالنقصان .

ويكون الجذر التربيعي المقرب إلى  $\frac{1}{10}$  للعدد 27,594 هو 5,2 .

بصفة عامة :

لحساب الجذر التربيعي التام أو المقرب لعدد عشري نكتب هذا العدد على شكل كسر عشري مقامه قوة للعدد 10 وأُس هذه القوة عدد طبيعي زوجي . يلاحظ عندئذ أن بسط هذا الكسر عدد طبيعي نبحت عن جذره التربيعي بإحدى الطرق السابقة .

• أوجد كلاً من  $\sqrt{0,94}$  ؛  $\sqrt{0,81}$  ؛  $\sqrt{1600}$  .

• احسب بأبسط كيفية ممكنة كلاً من :

$$\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{597}} ؛ \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{15}} ؛ \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}}$$

• أكمل كلاً مما يلي :

$$\frac{\dots}{\dots} = \frac{13}{9} \sqrt{\dots} ؛ \frac{\dots}{7\sqrt{\dots}} = \frac{25}{7} \sqrt{\dots}$$

$$\dots = \frac{\dots}{\dots} = \frac{144}{100} \sqrt{\dots}$$

• احسب كلاً مما يلي :

$$\frac{7}{3} \sqrt{\dots} \times \frac{3}{7} \sqrt{\dots} ؛ \sqrt{15} \times \frac{5}{3} \sqrt{\dots} ؛ \sqrt{6} \times \frac{3}{2} \sqrt{\dots}$$

$$\frac{3}{7} \sqrt{\dots} \times \sqrt{21}$$

### (3) - الجذر التربيعي لمجموع أو لفرق عددين

(1) هل العددين  $\sqrt{36} + \sqrt{64}$  و  $\sqrt{36 + 64}$  متساويان ؟

نعلم أن :  $6 = \sqrt{36}$  و  $8 = \sqrt{64}$

إذن :  $14 = \sqrt{36} + \sqrt{64}$

ولدينا :  $10 = \sqrt{100} = \sqrt{36 + 64}$

نستنتج أن :  $\sqrt{36 + 64} \neq \sqrt{36} + \sqrt{64}$

(2) هل العددين  $\sqrt{144} - \sqrt{169}$  و  $\sqrt{144 - 169}$  متساويان ؟

تعلم أن :  $12 = \sqrt{144}$  و  $13 = \sqrt{169}$

إذن :  $1 = 12 - 13 = \sqrt{144} - \sqrt{169}$

ولدينا :  $5 = \sqrt{25} = \sqrt{144 - 169}$

إذن :  $\sqrt{144} - \sqrt{169} \neq \sqrt{144 - 169}$

بصفة عامة

ا، ب عددين حقيقيين موجبان

$$(1) \quad \sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

$$(2) \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b} ; \text{ (حيث } a < b \text{)}$$

تطبيق :

لنحسب المجموع م التالي :

$$M = \sqrt{27} \sqrt{4} + \sqrt{18} \sqrt{10} - \sqrt{50} \sqrt{3} + \sqrt{20} \sqrt{2}$$

• لاحظ أن :  $3^3 = 27$  ،  $2^3 \times 2 = 18$  ،  $5^2 \times 2 = 50$  ،  $5 \times 2^2 = 20$

$$M = \sqrt[3]{3} \sqrt{4} + \sqrt{2^3 \times 2} \sqrt{10} - \sqrt{5 \times 2} \sqrt{3} + \sqrt{5 \times 2^2} \sqrt{2}$$

$$M = \sqrt[3]{3} \sqrt{3 \times 4} + \sqrt{2} \sqrt{3 \times 10} + \sqrt{2} \sqrt{5 \times 3} + \sqrt{5} \sqrt{2 \times 2} =$$

$$M = \sqrt[3]{3} \sqrt{12} + \sqrt{2} \sqrt{30} - \sqrt{2} \sqrt{15} + \sqrt{5} \sqrt{4} =$$

$$M = \sqrt[3]{3} \sqrt{12} + \sqrt{2} \sqrt{(30 - 15)} + \sqrt{5} \sqrt{4} =$$

$$M = \sqrt[3]{3} \sqrt{12} + \sqrt{2} \sqrt{15} - \sqrt{5} \sqrt{4} =$$

• احسب المجموع التالي :

$$N = \sqrt{125} \sqrt{98} - \sqrt{45} \sqrt{2} - \sqrt{72} \sqrt{5}$$

$$L = \sqrt{567} \sqrt{500} - \sqrt{252} \sqrt{5} + \sqrt{288} \sqrt{5}$$



## تطبيقات

1 - تعلم أنه إذا كان  $s$ ،  $c$  عددين حقيقيين فإن :

$$(s+c)(s-c) = s^2 - c^2$$

نستنتج القواعد التالية :

(1) إذا كان  $b$  عددًا حقيقيًا موجبًا فإن :

$$b - a^2 = (\sqrt{b})^2 - a^2 = (\sqrt{b} - a)(\sqrt{b} + a)$$

(2) إذا كان  $a$ ،  $b$  عددين حقيقيين موجبين فإن :

$$b - a^2 = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$$

أمثلة :  $2 = 7 - 9 = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3})$

$$(\sqrt{8})^2 - (\sqrt{11})^2 = (\sqrt{8} + \sqrt{11})(\sqrt{8} - \sqrt{11})$$

$$3 = 8 - 11 =$$

$$(\sqrt{23})^2 - (\sqrt{5 \times 2})^2 = (\sqrt{23} - \sqrt{5 \times 2})(\sqrt{23} + \sqrt{5 \times 2})$$

$$3 - = 23 - 5 \times 4 =$$

احسب ما يلي :

$$(\sqrt{7 \times 2} - 9)(\sqrt{7 \times 2} + 9) ; (\sqrt{2 \times 2} + \sqrt{3 \times 5})(\sqrt{2 \times 2} - \sqrt{3 \times 5})$$

$$\left( \sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left( \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \right)$$

2 - تذكر أنه إذا كانت  $\frac{a}{b}$  نسبة معلومة و  $k$  عدد حقيقي غير معدوم فإن :

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$$

مثال 1 : لنبحث عن نسبة تساوي النسبة  $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}2}$  يكون مقامها عددًا ناطقًا

تعلم أن :  $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$  حيث النسبة  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  معلومة و ك عدد حقيقي غير معدوم

لاحظ أن :  $5 = \sqrt{5} \times \sqrt{5}$  إذن يمكن أن نختار مثلاً  $\sqrt{5} = \sqrt{5}$  .

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}2} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{5} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{5 \times 2} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

فيكون

مثال 2 : لنبحث عن نسبة تساوي النسبة  $\frac{1}{2\sqrt{2}+6}$  يكون مقامها عددًا ناطقًا .

لاحظ أن :  $34 = 2 - 36 = (\sqrt{2} - 6)(\sqrt{2} + 6)$  .

$$\frac{\sqrt{2}-6}{34} = \frac{\sqrt{2}-6}{2-36} = \frac{(\sqrt{2}-6) \times 1}{(\sqrt{2}-6)(\sqrt{2}+6)} = \frac{1}{\sqrt{2}+6}$$

فيكون

مثال 3 : لنبحث عن نسبة تساوي النسبة  $\frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}$  يكون مقامها عددًا ناطقًا .

لاحظ أن :  $3 - 6 = 3 - 6 = (\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$  .

فيكون :

$$\frac{2\sqrt{3}+3}{3-6} = \frac{18\sqrt{3}+3}{6-3} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{3})3\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{2}-1 = (\sqrt{2}+1) - 1 = \frac{(\sqrt{2}+1)}{1-3} = \frac{(\sqrt{2}+1)3}{3-6} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$$

مثال 4 : لنحسب المجموع التالي :

$$\frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3} = م$$

لدينا :

$$\frac{3 + \sqrt{3}\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + \sqrt{3}\sqrt{3}}{3 - 9} = \frac{(\sqrt{3} + 3)\sqrt{3}}{(\sqrt{3} + 3)(\sqrt{3} - 3)} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3} \cdot$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{(1 + \sqrt{3})3}{6} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3}$$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{6}\sqrt{4} - \sqrt{3}\sqrt{4}}{6 - 3} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{3})4}{(\sqrt{6} - \sqrt{3})(\sqrt{6} + \sqrt{3})} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{4} - \sqrt{6}\sqrt{4}}{3} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{4} - \sqrt{3}\sqrt{4}}{3 -} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{4} - \sqrt{6}\sqrt{4}}{3} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3} = م$$

$$\frac{(\sqrt{3}\sqrt{4} - \sqrt{6}\sqrt{4})2 - (\sqrt{2}\sqrt{3}) \times 3 + (1 + \sqrt{3})3}{6} = م$$

$$\frac{3 + \sqrt{6}\sqrt{8} - \sqrt{2}\sqrt{9} + \sqrt{3}\sqrt{11}}{6} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{8} + \sqrt{6}\sqrt{8} - \sqrt{2}\sqrt{9} + 3 + \sqrt{3}\sqrt{3}}{6} = م$$

## تمارين

1. يبين أن كلاً من الأعداد الآتية هو مربع لعدد طبيعي يطلب تعيينه :  
 $12 \times 3 \times 2^3$  ؛  $12 \times 36 \times 3 \times 2^2$  ؛  $15 \times 5 \times 3^3 \times 2$  ؛  
 $21 \times 15 \times 105 \times 3$
2. حلل إلى جداء عوامل أولية كلاً من الأعداد الآتية ، ثم عيّن الأعداد التي هي مربعات :  
192 ؛ 441 ؛ 2025 ؛ 3468 ؛ 2401 ؛ 12544 .
3. يبين أن كلاً من الجداءات الآتية هو مربع لعدد صحيح يطلب تعيينه :  
 $(3 - )^2 \times (63 - ) \times (28 - )$  ؛  $(5 - )^3 \times 7$  ؛  
 $(7 - )^5 \times (5 - )^3 \times 35$  .
4. عيّن الجذر التربيعي التام لكل من الأعداد الآتية :  
1521 ؛ 1156 ؛ 2601 ؛ 11664 ؛ 441 .
5. عيّن الجذر التربيعي التام لكل من الأعداد الآتية :  
 $\frac{169}{1521}$  ؛  $\frac{9604}{11025}$  ؛  $\frac{324}{1225}$  ؛  $\frac{625}{841}$  ؛  $\frac{121}{144}$  .
6. (1) أكتب العدد 4212 علي شكل جداء عوامل أولية ؛  
نضع  $4212 = \times \text{ب}$  .  
عيّن أصغر قيمة للعدد ب حتي يكون  $\times$  مربعاً لعدد طبيعي يطلب تعيينه .  
(2) نفس السؤال من أجل العدد 8820 .
7. عيّن الجذور التربيعية الآتية :

$$\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times 11} ؛ \sqrt{[7 \times (3 - )]^2} ؛$$

$$\sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2 \left(\frac{17}{2}\right)^2}$$



8. احسب الجذر التربيعي بالنقصان إلى وحدة لكل من الأعداد الآتية :  
 99347 ، 112896 ، 9541,81 ، 1783,41 ، 4001328 .

9. احسب الجذر التربيعي المقرب إلى  $\frac{1}{10}$  (أى 0,1) بالنقصان لكل من الأعداد الحقيقية  
 الآتية :

$$8477 ، 25817 ، 0,0472 ، \frac{3479}{100} ، 37,421 .$$

10. احسب الجذر التربيعي المقرب إلى  $\frac{1}{10^2}$  (أى 0,01) بالنقصان لكل من الأعداد  
 الحقيقية الآتية :

$$28416 ، 375 ، 1,75 ، 1,75 ، 738,4 ، \frac{22}{7} ، 0,039 .$$

11. احسب الجذر التربيعي المقرب إلى  $\frac{1}{10^3}$  (أى 0,001) بالنقصان لكل من الأعداد  
 الحقيقية الآتية :

$$\frac{34792}{10^2} ، \frac{9}{10} ، 1,7824 ، 0,03542 ، 312 .$$

12. عيّن بالديسمتر أطوال أضلاع المربعات التي أقياس مساحتها هي :  
 618 د<sup>2</sup> ، 64,49 م<sup>2</sup> ، 123,45 م<sup>2</sup> ، 132,38 س آر .

13. مساحة قطعة أرض مستطيلة الشكل هي 9548 م<sup>2</sup> ، عرضها  $\frac{4}{7}$  طولها .

أحسب بتقريب  $\frac{1}{10}$  بالنقصان طول وعرض هذه القطعة .

ملاحظة : تعطي النتائج في التمرينين 12 ، 13 بتقريب  $\frac{1}{10}$  بالنقصان .

14. احسب بالديسمتر بعدى مستطيل طوله ضعف عرضه ومساحته 22050 م<sup>2</sup>.

15. احسب بتقريب  $\frac{1}{10}$  بالنقصان كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية :

$$. \sqrt{116} + \sqrt{57} - \sqrt{68} \quad ; \quad \sqrt{196} - \sqrt{138} + \sqrt{84}$$

16. احسب الجداءات الآتية :

$$(1) \quad \sqrt{0,6} \times \sqrt{2,4} \quad ; \quad \sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \sqrt{27} \quad ; \quad \sqrt{14} \times \sqrt{126} \quad ; \quad \sqrt{8} \times \sqrt{18}$$

$$(2) \quad \sqrt{0,8} \times \sqrt{3,2} \quad ; \quad \sqrt{50} \times \sqrt{3} \times \sqrt{72} \quad ; \quad \sqrt{75} \times \sqrt{48} \times \sqrt{45}$$

$$(3) \quad \sqrt{5} \times \sqrt{7} \times \sqrt{45} \quad ; \quad \sqrt{0,18} \times \sqrt{4,5} \quad ; \quad \sqrt{7} \times \sqrt{3} \times \sqrt{63}$$

$$\sqrt{0,18} \times \sqrt{0,01}$$

17. احسب الجداءات الآتية :

$$(1) \quad \sqrt{\frac{3}{8}} \times \sqrt{\frac{2}{27}} \times 2 \quad ; \quad \sqrt{12} \times \sqrt{\frac{1}{3}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{32}$$

$$\sqrt{\frac{45}{18}} \times \sqrt{\frac{8}{5}} \times 3$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{65}{8}} \times \sqrt{\frac{26}{5}} \times 4 \quad ; \quad \sqrt{\frac{30}{49}} \times 7 \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{27}} \times \sqrt{75} \quad ; \quad \sqrt{\frac{1}{5}} \times \sqrt{45}$$

18. احسب المجاميع الآتية :

$$(1) \quad \sqrt{0,64} - \sqrt{0,49} + \sqrt{1,21} \quad ; \quad \sqrt{4} + \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

$$\sqrt{1,69} + \sqrt{0,25} - \sqrt{0,16}$$

$$(2) \quad \sqrt{16} - \sqrt{144} + \sqrt{25} \quad ; \quad \sqrt{1,96} - \sqrt{81} + \sqrt{2,25}$$

$$\sqrt{0,09} - \sqrt{0,16} + \sqrt{0,25}$$

19. احسب كلاً من المجاميع الآتية :

$$(1) \quad \sqrt{18} + \sqrt{8} - \sqrt{2} \times 4 \quad ; \quad \sqrt{45} - \sqrt{5} \times 2 + \sqrt{20} \quad ; \quad \sqrt{24} + \sqrt{6} - \sqrt{54}$$

$$\sqrt{\frac{25}{12}} - \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{3}{4}} ; \sqrt{252} - \sqrt{175} + \sqrt{28} \sqrt{5} \quad (2)$$

$$\sqrt{726} + \sqrt{150} - \sqrt{96} \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{1}{5}} \sqrt{5 - 10} \sqrt{3} + \sqrt{5} \sqrt{2} ; \frac{\sqrt{2} \sqrt{3}}{4} + \sqrt{2} \sqrt{3} - \sqrt{2} \sqrt{5} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{3}{16}} - \sqrt{12} \sqrt{5} + \frac{\sqrt{12}}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{6}$$

20. انشر كلاً مما يلي:

$$; (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) ; (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

$$. (\sqrt{5} \sqrt{2} + 3)(\sqrt{5} \sqrt{2} - 3)$$

21. اكتب كلاً من النسب الآتية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

$$\frac{3}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} ; \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 2\sqrt{2}} ; \frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2} - 1} ; \frac{1}{\sqrt{5} - 5} ; \frac{231}{2 - 3\sqrt{2}}$$

22. (1) اكتب كلاً من النسب الآتية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} ; \frac{3}{2\sqrt{2}} ; \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}}$$

$$(2) \text{ احسب } \frac{1 + \sqrt{2}}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1 + 2\sqrt{2}}$$

23. اكتب كلاً من النسب الآتية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{7}}{3 + 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2}} ; \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} ; \frac{2}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 1}$$

24. (1) اكتب كلاً من النسب الآتية على شكل نسبة مقامها عدد ناطق .

$$\frac{2 - \sqrt{5}}{5\sqrt{2} - 5} = \alpha ; \frac{1}{2 + \sqrt{5}} = \beta ; \frac{1}{\sqrt{5}} = \gamma$$

(2) احسب المجموع  $\alpha + \beta + \gamma =$  .

(3) احسب  $\sqrt{5}$  بتقريب  $\frac{1}{10}$  أى 0,01 واستنتج قيمة المجموع  $\alpha + \beta + \gamma$  بتقريب 0,01

بالنقصان .

25. (1) تحقق أن  $(\sqrt{5} + 2)^2 = (\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} + 2) = 5 + 4\sqrt{5} + 4 = 9 + 4\sqrt{5}$

(2) برهن أن كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية هو مربع مجموع أو فرق عددين حقيقيين :

$$9 - 4\sqrt{5} ; 6 + \sqrt{5} ; 10 - 2\sqrt{21} ; 16 - 6\sqrt{7}$$

26. احسب في كل حالة  $\alpha^2$  ،  $\beta^2$  ثم استنتج العلاقة بين  $\alpha$  ،  $\beta$  في كل مما يلي :

$$\alpha = \sqrt{3} + 2 , \beta = \sqrt{3} + 7\sqrt{4}$$

$$\alpha = \sqrt{3} + 2 , \beta = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

$$\alpha = \sqrt{3} + 5 , \beta = \sqrt{3} + 15\sqrt{2} + 8\sqrt{5}$$

$$\alpha = \sqrt{2} - 3 , \beta = \sqrt{2} + 24 - 44\sqrt{2}$$

27. انشر كلاً مما يلي :

$$\left( \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{4}\sqrt{5} \right)^2 ; \left( \sqrt{7} - 1 \right)^2 ; \left( 2 + \sqrt{5} \right)^2 ; \left( \sqrt{2} - \sqrt{3} \right)^2$$

$$\left( \frac{5}{6}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{5} \right)^2 ; \left( \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \right)^2 ; \left( \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \right)^2$$

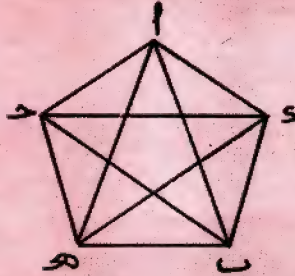
$$\left( \frac{8}{4}\sqrt{3} - \frac{13}{2}\sqrt{5} \right)^2 ; \left( \frac{8}{4}\sqrt{3} + \frac{13}{2}\sqrt{5} \right)^2$$



## العدد الذهبي

وجد الرياضيون القدامى أن :

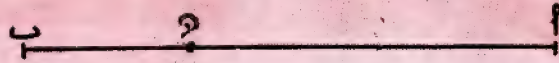
- نسبة طول ضلع خماسي نجمي منتظم إلى طول ضلع الخماسي المحذب الذي له نفس الرؤوس ، تساوي العدد الأصم  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ .



مثلا في الشكل لدينا  $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{ا ب}{ا س}$

- إذا كانت [ ا ب ] قطعة مستقيمة و د نقطة من [ ا ب ] بحيث

$$\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ا د}{د ب} ، \text{ فإن } \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{ا ب}{ا د}$$



النسبة  $\frac{ا ب}{ا د}$  هي نسبة عجيبة !!

العدد الأصم  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  يسمى العدد الذهبي .

للعدد الذهبي تطبيقات عديدة في فنون الزخرفة المعمارية .

### 1. المحور :

(و) مستقيم ، و شعاع غير معدوم له منحى (و) (الشكل 1) .



الشئاة المرتبة (و ، و) تسمى محوراً . الشكل 1

- المستقيم (و) يسمى حامل المحور (و ، و) .
- الشعاع و يسمى شعاع الوحدة للمحور (و ، و) .

نتفق على أن :

اتجاه الشعاع و هو الاتجاه الموجب لهذا المحور ، والاتجاه المعاكس هو الاتجاه السالب .

### 2. القيس الجبري لشعاع :

(و ، و) محور ، ش شعاع يوازي و .

بما أن الشعاعين ش ، و متوازيان فإنه يوجد عدد حقيقي وحيد س بحيث :

$$\vec{ش} = س \cdot \vec{و}$$

• العدد الحقيقي س يسمى القيس الجبري للشعاع ش بالنسبة إلى شعاع الوحدة و .

– إذا كانت أ ، ب نقطتين من (و) بحيث  $\vec{أب} = \vec{ش}$  فترمز للقيس الجبري للشعاع  $\vec{أب}$  بالرمز  $\overline{أب}$  ونكتب :

$$\vec{ش} = \vec{أب} = \overline{أب} \cdot \vec{و}$$

### ملاحظة 1 :

إذا كان للشعاعين  $\vec{S}$  ، و  $\vec{S'}$  نفس الاتجاه فإن القيس الجبري للشعاع  $\vec{S}$  هو عدد حقيقي موجب ؛ وإذا كان  $\vec{S}$  ، و  $\vec{S'}$  من اتجاهين مختلفين فإن القيس الجبري للشعاع  $\vec{S}$  هو عدد حقيقي سالب .

### ملاحظة 2 :

القيس الجبري لشعاع معدوم هو العدد الحقيقي المعدوم ، لأن :

$$\vec{0} = 0 \cdot \vec{O}$$

(و ،  $\vec{O}$ ) محور ؛ أ ، ب نقطتان من (و) .  
- عيّن القيس الجبري للشعاع  $\vec{AB}$  في كل من الحالات الآتية :

$$\vec{AB} = -\vec{BA} \text{ ؛ } \vec{AB} = \frac{3}{4}\vec{AO} \text{ ؛ } \vec{AB} = -\sqrt{3}\vec{AO} .$$

### 3. علاقة شال :

(و ،  $\vec{O}$ ) محور ؛ أ ، ب ، ح ثلاث نقط من (و) .  
نعلم أن  $\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$   
لكن  $\vec{AB} = \vec{AO} \cdot \vec{OB}$  ؛  $\vec{AB} = \vec{AO} \cdot \vec{OB}$  ؛  $\vec{AB} = \vec{AO} \cdot \vec{OB}$  ؛  $\vec{AB} = \vec{AO} \cdot \vec{OB}$  ؛  
فيكون  $\vec{AB} = \vec{AO} \cdot \vec{OB} + \vec{AO} \cdot \vec{OB}$  ؛  
ومنه  $\vec{AB} = \vec{AO} \cdot (\vec{OB} + \vec{OB})$  .

وبما أن القيس الجبري للشعاع  $\vec{AB}$  بالنسبة إلى الشعاع  $\vec{AO}$  ، وحيد ،

$$\boxed{\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}}$$

نستنتج أن :  
هذه المساواة تسمى علاقة شال .



ملاحظة :

يمكننا أن نجد أيضا علاقات أخرى مثل :  
 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  ،  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$  ،  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$

- (و، و) محور ؛ أ، ب، ج، د أربع نقط من المستقيم (و) .
- (1) بين أن  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  .
- (2) بين أن  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$  .

#### 4. المعلم الخطي :

تعريف :

- (و، و) محور .
- كل ثنائية مرتبة (م، و) ، حيث م نقطة من (و) تسمى معلما للمستقيم (و) .
- النقطة م تسمى مبدأ المعلم
  - والشعاع و يسمى شعاع الوحدة لهذا المعلم .

في الشكل (2) الثنائية (م، و) هي معلم للمستقيم (و) .



الشكل 2

وتسمى أيضا معلما خطيا .

ونقول إن المستقيم (و) مزود بالمعلم (م، و) .

ونقول أيضا إن (و) مستقيم مدرّج .



## 5. فاصلة نقطة :

تعريف :

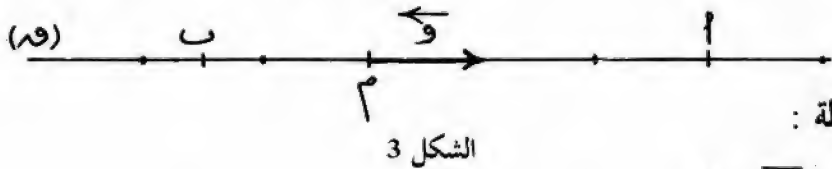
(و) مستقيم مزود بالمعلم (م، و).  
فاصلة نقطة  $\overline{م و}$  من المستقيم (و) بالنسبة إلى المعلم (م، و) هي القيس الجبري للشعاع  $\overrightarrow{م و}$  بالنسبة إلى  $\overrightarrow{و}$ .

• إذا كان  $\overline{م و} = س$  فإن س هو فاصلة النقطة  $\overline{م و}$  بالنسبة إلى المعلم (م، و) ونكتب :  $\overline{م و} (س)$ .

ونقرأ « النقطة  $\overline{م و}$  التي فاصلتها س ».

مثال : في الشكل 3 فاصلة النقطة  $\overline{م و}$  بالنسبة إلى المعلم (م، و) هي  $(3+)$  نكتب :  $\overline{م و} (3+)$

وفاصلة النقطة  $\overline{ب و}$  بالنسبة إلى المعلم (م، و) هي  $\frac{3}{2}-$  نكتب  $\overline{ب و} (\frac{3}{2}-)$ .



ملاحظة :

نعلم أن  $\overline{م م} = 0$

إذن فاصلة النقطة  $\overline{م م}$  بالنسبة إلى المعلم (م، و) تساوي 0

نكتب  $\overline{م م} (0)$ .

نقبل ما يلي :

• مهما يكن العدد الحقيقي س فإنه توجد نقطة وحيدة  $\overline{م و}$  من المستقيم (و) المزود بالمعلم (م، و)، فاصلتها بالنسبة إلى هذا المعلم هي العدد الحقيقي س.

## 6. تطبيقات :

(٩) مستقيم مزود بالمعلم (م، و)؛ ا، ب نقطتان من (٩)، نرسم لفاصلتيهما بالرمزين  $s_1$ ،  $s_2$  على الترتيب.

أولاً :

- لنبرهن أن  $\overline{ab} = s_1 - s_2$

البرهان : بما أن النقط ا، ب، م على استقامة واحدة

فلدينا حسب علاقة شال :  $\overline{ab} = \overline{am} + \overline{mb}$

لكن  $\overline{am} = \overline{s_1}$

إذن  $\overline{ab} = \overline{s_1} + \overline{mb} = \overline{mb} - \overline{bm}$  أي  $\overline{ab} = \overline{bm} - \overline{bm}$

ولدينا  $\overline{bm} = s_2$  و  $\overline{bm} = s_1$

نستنتج أن :  $\overline{ab} = s_1 - s_2$

نتيجة :

ا، ب نقطتان من مستقيم مزود بمعلم .  
القيس الجبري للشعاع  $\overline{ab}$  بالنسبة إلى هذا المعلم يساوي الفرق بين فاصلة ب وفاصلة ا .

مثال :

إذا كان  $s_1 = \frac{3}{2} +$  و  $s_2 = \frac{5}{6} -$  فإن :

$$\overline{ab} = s_1 - s_2 = \left( \frac{3}{2} + \right) - \left( \frac{5}{6} - \right) = \frac{18 - 10 -}{12} = \frac{28 -}{12} = \frac{7}{3} -$$

ثانيًا :

م منتصف القطعة المستقيمة [أب] فاصلتها س .

$$- \text{ لنبرهن أن : } \overline{س} = \frac{\overline{س} + \overline{س}}{2}$$

البرهان :

لدينا حسب علاقة شال :

$$(1) \dots\dots \overline{م} = \overline{م} + \overline{أ} = \overline{أ} \dots\dots (1)$$

$$(2) \dots\dots \overline{م} = \overline{م} + \overline{ب} = \overline{ب} \dots\dots (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\overline{م} + \overline{أ} = \overline{م} + \overline{ب} \quad \therefore \overline{أ} = \overline{ب}$$

$$\overline{م} + \overline{أ} = \overline{م} + \overline{ب} \quad \therefore \overline{أ} = \overline{ب}$$

وبما أن م منتصف [أب] فيكون  $\overline{أ} = \overline{ب}$   $0 = \overline{أ} - \overline{ب}$

$$\overline{م} = \frac{\overline{م} + \overline{م}}{2} \quad \text{إذن } \overline{م} = \frac{\overline{م} + \overline{م}}{2} \quad \text{أي } \overline{م} = \frac{\overline{م} + \overline{م}}{2}$$

$$\overline{م} = \frac{\overline{س} + \overline{س}}{2} \quad \text{ومنه}$$

نتيجة :

فاصلة منتصف قطعة مستقيمة تساوي نصف مجموع فاصلتي طرفي هذه القطعة .

مثال : إذا كان  $\overline{س} = 5$  و  $\overline{س} = \frac{3}{2}$  فإن :

$$\overline{س} = \frac{\overline{س} + \overline{س}}{2} = \frac{5 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{10}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\frac{13}{2}}{2} = \frac{13}{4}$$

### ثالثاً :

- لنعيّن المسافة بين النقطتين  $a$ ،  $b$  أي  $|ab|$  بدلالة  $s$ ،  $s$  .  
البرهان :

$$\text{لدينا } \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ab} \cdot \vec{u}.$$

$$\text{ونعلم أن } \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{s} - \overrightarrow{s}$$

$$\text{فيكون } \overrightarrow{ab} = (\overrightarrow{s} - \overrightarrow{s}) \cdot \vec{u} \text{ ..... (1)}$$

$$\text{نعلم أن } \|\overrightarrow{ab}\| = \|ab\|$$

من (1) نستنتج أن :

$$\|\overrightarrow{ab}\| = \|(\overrightarrow{s} - \overrightarrow{s}) \cdot \vec{u}\| = \|\overrightarrow{s} - \overrightarrow{s}\| \cdot \|\vec{u}\|.$$

$$\text{وبما أن } \|\overrightarrow{ab}\| = |ab| \text{ و } \|\vec{u}\| = 1 \text{ فإن :}$$

$$|ab| = |s - s| \text{ أي } |ab| = |s - s|$$

مثال : إذا كان  $s = 2,3$  و  $s = -5$  فإن :

$$|ab| = |-5 - 2,3| = |7,3| = 7,3.$$

$a$ ،  $b$ ،  $c$  ثلاث نقط من المستقيم  $(s, s')$  المزود بالمعلم  $(m, \vec{u})$  .

$$\text{حيث } a \left( \frac{3}{2} - \right) ; b \left( \frac{3}{2} + \right) ; c \left( \frac{5}{4} + \right).$$

(1) احسب  $\overrightarrow{ab}$ ،  $\overrightarrow{ac}$ ،  $\overrightarrow{bc}$  ثم استنتج كلاً من  $|ab|$ ،  $|ac|$ ،  $|bc|$  .

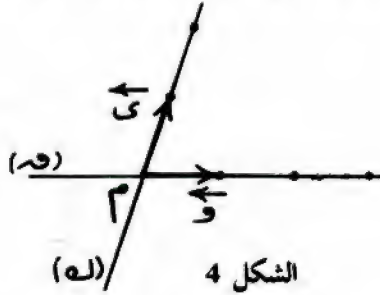
(2) عيّن  $s$ ،  $s'$ ،  $s''$  فواصل منتصفات القطع  $[ab]$ ،  $[ac]$ ،  $[bc]$  .



## العالم المستوي

### 1. العلم المستوي :

(و) ، (ك) مستقيمان متقاطعان في نقطة م .  
 (و) مزود بالمعلم (م ، و) ، (ك) مزود بالمعلم (م ، و) (الشكل 4)  
 بما أن (و) و (ك) متقاطعان . فإن الشعاعين و ، و غير معدومين  
 وغير متوازيين



الشكل 4

- إذا رتبنا عناصر المجموعة الثلاثية { م ، و ، و } ، بحيث يكون م هو العنصر الأول ، و ، و هما العنصران الثاني والثالث فنحصل على مجموعة مرتبة نسميها ثلاثية مرتبة ونرمز لها بالرمز (م ، و ، و) .  
 - الثلاثية المرتبة (م ، و ، و) تسمى معلماً للمستوي .

تعريف :

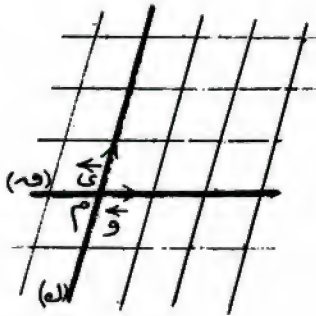
كل ثلاثية مرتبة (م ، و ، و) مركبتها الأولى نقطة من مستو ومركبتها الثانية والثالثة شعاعان في نفس المستوي غير معدومين وغير متوازيين ، تسمى معلماً لهذا المستوي .

- نسمي النقطة م مبدأ المعلم .
- الشعاعان و ، و هما شعاعا الوحدة لهذا المعلم .
- الثنائية المرتبة (و ، و) تسمى أساساً للمستوي .

نقول أيضاً إن المستوي مزود بالمعلم (م ، و ، و) .

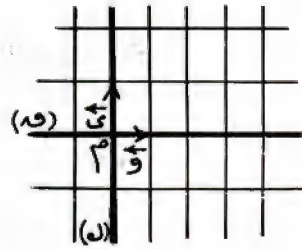
## 2. أنواع المعالم المستوية :

- إذا كان المستقيمان (ق) ، (ك) متعامدين ، فنقول إن المعلم (م ، و ، ى) متعامد . (الشكل 5) .
- إذا كان  $\vec{و} = \vec{ى}$  فنقول إن المعلم (م ، و ، ى) متجانس (الشكل 6)
- إذا كان (ق) ، (ك) متعامدين وكان  $\vec{و} = \vec{ى}$  فنقول إن المعلم (م ، و ، ى) متعامد ومتجانس . (الشكل 7) .



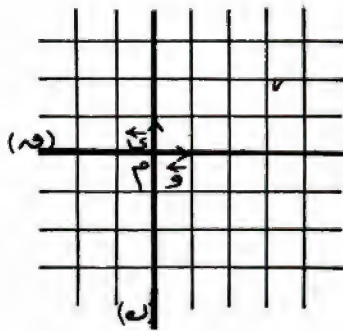
الشكل 6

(م ، و ، ى) معلم متجانس



الشكل 5

(م ، و ، ى) معلم متعامد

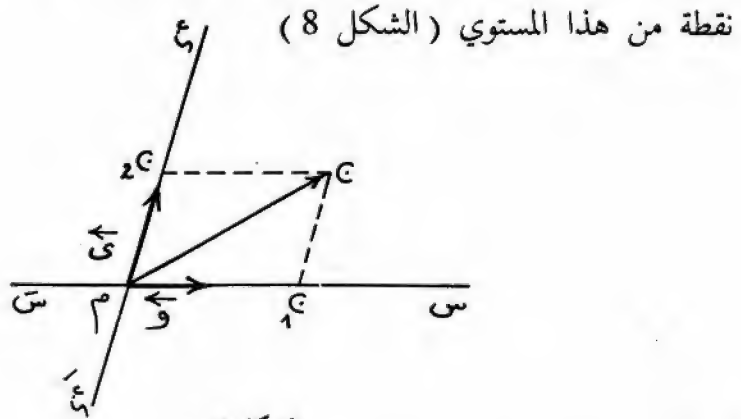


الشكل 7

(م ، و ، ى) معلم متعامد ومتجانس .

### 3. إحداثيا نقطة :

(م، و، ع) معلم للمستوي محوره (س، س') و (ع، ع')، (ع، ع')



الشكل 8

- المستقيم الذي يوازي (ع، ع') ويشمل م يقطع (س، س') في نقطة م<sub>1</sub>.  
والمستقيم الذي يوازي (س، س') ويشمل م يقطع (ع، ع') في نقطة م<sub>2</sub>.  
نستنتج أن الرباعي م م<sub>1</sub> م<sub>2</sub> متوازي أضلاع.

ويكون :  $\overrightarrow{م م_1} = \overrightarrow{م م_2}$  ؛  $\overrightarrow{م م_1} = \overrightarrow{م م_2}$  .  
لكن :  $\overrightarrow{م م_1} + \overrightarrow{م م_2} = \overrightarrow{م م}$  أيضا  $\overrightarrow{م م_2} + \overrightarrow{م م_1} = \overrightarrow{م م}$  .

إذن :  $\overrightarrow{م م_1} + \overrightarrow{م م_2} = \overrightarrow{م م}$

نعلم أنه يوجد عدد حقيقي وحيد س بحيث  $\overrightarrow{م م_1} = س \cdot \overrightarrow{و س}$  . و حيث س هو فاصلة م<sub>1</sub> بالنسبة إلى المعلم (م، و) .

ويوجد عدد حقيقي وحيد ع بحيث  $\overrightarrow{م م_2} = ع \cdot \overrightarrow{ع س'}$  . حيث ع هو فاصلة م<sub>2</sub> بالنسبة إلى المعلم (م، ع) .

إذن  $\overrightarrow{م م} = س \cdot \overrightarrow{و س} + ع \cdot \overrightarrow{ع س'}$

مهما كانت النقطة  $\odot$  من المستوي المزود بالمعلم  $(\vec{m}, \vec{u}, \vec{v})$  فيوجد عدنان حقيقيان وحيدان  $s, c$  بحيث :

$$\vec{m} \odot = s\vec{u} + c\vec{v}$$

نقول إن العددين الحقيقيين  $s, c$  هما إحداثيا النقطة  $\odot$  بالنسبة إلى المعلم  $(\vec{m}, \vec{u}, \vec{v})$ .

**تعريف :**

$\odot$  نقطة من استوي المزود بالمعلم  $(\vec{m}, \vec{u}, \vec{v})$ .

إحداثيا النقطة  $\odot$  بالنسبة إلى هذا المعلم هما العدنان الحقيقيان  $s, c$ ، حيث

$$\vec{m} \odot = s\vec{u} + c\vec{v}$$

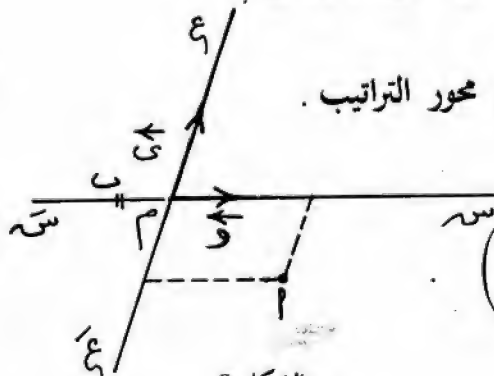
- نكتب  $\odot (s, c)$  ونقرأ « النقطة  $\odot$  التي إحداثياها  $s, c$  ».

$s$  يسمى فاصلة  $\odot$  و  $c$  يسمى ترتيبها.

- المحور  $(s', u, \vec{v})$  يسمى محور الفواصل.

- والمحور  $(c', u, \vec{v})$  يسمى محور الترتيب.

لدينا في (الشكل 9)



$$A(1, 2), B(0, \frac{1}{2})$$

الشكل 9



نقبل ما يلي :

مهما تكن الثنائية (س، ع) من  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  ، فإنه توجد نقطة وحيدة  $\mathcal{H}$  من المستوى المزود بمعلم (م، و،  $\vec{u}$ ) ، إحداثياتها بالنسبة إلى هذا المعلم هما العددان الحقيقيان س، ع .

ملاحظات :

(1) إذا كانت النقطة  $\mathcal{H}$  (س، ع) تنتمي إلى محور الفواصل ، فإن ترتيبها معدوم أي  $0 = \mathcal{E}$  .

نكتب  $\mathcal{H}$  (س، 0) .

(2) إذا كانت النقطة  $\mathcal{H}$  (س، ع) تنتمي إلى محور الترتيب ، فإن فاصلتها معدومة أي  $0 = \mathcal{S}$  .

نكتب  $\mathcal{H}$  (0، ع) .

(3) إحداثيا المبدأ م هما 0، 0 .

نكتب م (0، 0) .

(م، و،  $\vec{u}$ ) معلم متعامد ومتجانس للمستوي حيث :  
 $\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\| = 2$  ، وحدة الطول هي الستيمتر .

(1) عيّن في هذا المستوي النقط :

أ (0، -2) ؛ ب  $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$  ؛ ج  $(2, \frac{1}{2})$  ؛ د (-1، 0) .

(2) عيّن إحداثيات نظائر هذه النقط بالنسبة إلى المبدأ م .

(3) أوجد إحداثيي النقطة  $\mathcal{H}$  في الحالات الآتية :

$\vec{m} = \vec{w} - \vec{u}$  ؛  $\vec{m} = -\vec{u} - \vec{w}$  ؛  $\vec{m} = \vec{u} - 3\vec{w}$  .

#### 4. مركبتا شعاع :

تعريف :

ق<sup>+</sup> شعاع في مستو مزدود بمعلم (م ، و<sup>+</sup> ، ع<sup>+</sup>) ، ه نقطة من هذا المستوي بحيث

$$\overrightarrow{م ه} = \overrightarrow{ق ه}.$$

نسمي إحداثيي النقطة ه بالنسبة إلى المعلم (م ، و<sup>+</sup> ، ع<sup>+</sup>) مركبتا الشعاع ق<sup>+</sup> بالنسبة إلى الأساس (و<sup>+</sup> ، ع<sup>+</sup>) .

• إذا كان  $\overrightarrow{م ه} = س \cdot \overrightarrow{و ه} + ع \cdot \overrightarrow{ع ه}$  فنكتب ه (س ، ع) .  
العددان س ، ع هما مركبتا الشعاع ق<sup>+</sup> بالنسبة إلى الأساس (و<sup>+</sup> ، ع<sup>+</sup>) .

$$\text{نكتب : } ق^+ = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$$

ونقرأ « الشعاع ق<sup>+</sup> الذي مركبتاه س ، ع » .  
• العدد س يسمى المركبة الأولى للشعاع ق<sup>+</sup> .  
• والعدد ع يسمى المركبة الثانية للشعاع ق<sup>+</sup> .

ملاحظات :

(1) إذا كان الشعاع ق<sup>+</sup> يوازي الشعاع و<sup>+</sup> فإن  
 $ق^+ = س \cdot \overrightarrow{و ه}$  يمكن أن نكتب  $ق^+ = س \cdot \overrightarrow{و ه} + 0 \cdot \overrightarrow{ع ه}$  .

$$\text{ويكون } ق^+ = \begin{pmatrix} س \\ 0 \end{pmatrix} .$$

(2) إذا كان ق<sup>+</sup> يوازي الشعاع ع<sup>+</sup> فإن  
 $ق^+ = ع \cdot \overrightarrow{ع ه}$  ويمكن أن نكتب  $ق^+ = 0 \cdot \overrightarrow{و ه} + ع \cdot \overrightarrow{ع ه}$  .

$$\text{ويكون } ق^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ ع \end{pmatrix} .$$

3) مركبتا الشعاع المعلوم هما  $0, 0$  أى  $0 = 0 + 0$ .

نكتب  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## 5. تطبيقات :

### مسألة 1 :

(م، و، ع) معلم للمستوي ؛  $\begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$  ،  $\begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$  شعاعان في هذا المستوي

- لنبرهن أن مركبتى الشعاع  $(ق + ق')$  هما  $(س + س')$  و  $(ع + ع')$ .

البرهان :

$$\begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix} ق \text{ معناه } ق = س + و + ع$$

$$\begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix} ق' \text{ معناه } ق' = س' + و' + ع'$$

$$\text{فيكون } ق + ق' = (س + و + ع) + (س' + و' + ع')$$

$$ق + ق' = (س + س') + (و + و') + (ع + ع')$$

هذا يعني أن مركبتى الشعاع  $(ق + ق')$  بالنسبة إلى الأساس  $(و، ع)$

هما  $(س + س')$  و  $(ع + ع')$ .

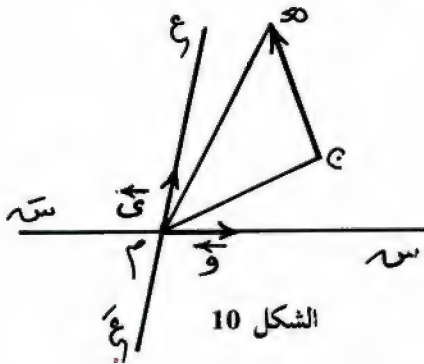
$$\text{نكتب } ق + ق' = \begin{pmatrix} س + س' \\ ع + ع' \end{pmatrix}$$

## مسألة 2 :

هـ ، نقطتان من مستو مزود بمعلم (م ، و ، ع) ، بحيث :

$$\vec{h} = (\vec{s}_1, \vec{e}_1) \text{ و } \vec{h} = (\vec{s}_2, \vec{e}_2).$$

- لنبحث عن مركبتي الشعاع  $\vec{h}$  (الشكل 10)



$$\text{لدينا } \vec{h} = \vec{s}_1 + \vec{e}_1.$$

$$\text{أي } \vec{h} = \vec{s}_2 + \vec{e}_2.$$

$$\text{وبما أن } \vec{h} = \vec{s}_1 + \vec{e}_1 = \vec{s}_2 + \vec{e}_2,$$

$$\text{و } \vec{h} = \vec{s}_2 + \vec{e}_2 = \vec{s}_1 + \vec{e}_1,$$

$$\text{فإن } \vec{h} = (\vec{s}_1 + \vec{e}_1) - (\vec{s}_2 + \vec{e}_2).$$

$$\vec{h} = \vec{s}_1 + \vec{e}_1 - \vec{s}_2 - \vec{e}_2.$$

$$\vec{h} = (\vec{s}_1 - \vec{s}_2) + (\vec{e}_1 - \vec{e}_2).$$

وهذا يعني أن مركبتي الشعاع  $\vec{h}$  هما  $(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)$  و  $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$  ،

بالنسبة إلى الأساس (و ، ع) .

$$\text{نكتب } \vec{h} = \begin{pmatrix} \vec{s}_1 - \vec{s}_2 \\ \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

نتيجة :

المركبة الأولى للشعاع  $\vec{h}$  تساوي الفرق  $(\vec{s}_1 - \vec{s}_2)$

المركبة الثانية للشعاع  $\vec{h}$  تساوي الفرق  $(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$



(م، و، ع) معلم للمستوي ق، ش شعاعان في هذا المستوي حيث :

$$\overrightarrow{ق} = 2\overrightarrow{و} ؛ \overrightarrow{ش} = \frac{3}{2}\overrightarrow{ع}$$

- أوجد مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{م}$  في الحالات الآتية :

$$\overrightarrow{م} = 8\overrightarrow{ق} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ع} ؛ \overrightarrow{م} = \frac{3}{4}\overrightarrow{و} - 4\overrightarrow{ش} ؛ \overrightarrow{م} = \frac{7}{3}\overrightarrow{ق} + \frac{2}{5}\overrightarrow{ش} .$$

مسألة 3 :

(م، و، ع) معلم للمستوي ق، ش شعاعان في هذا المستوي حيث

$$\overrightarrow{ق} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix} ، \overrightarrow{ش} = \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix} .$$

- لنبرهن ما يلي :

$$\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ش} \text{ يعني أن } س = س' \text{ و } ع = ع' .$$

البرهان :

$$\overrightarrow{ق} = \overrightarrow{ش} \text{ معناه } \overrightarrow{ق} - \overrightarrow{ش} = \vec{0} .$$

$$\overrightarrow{ق} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix} \text{ معناه } \overrightarrow{ق} = س\overrightarrow{و} + ع\overrightarrow{ي} .$$

$$\overrightarrow{ش} = \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix} \text{ معناه } \overrightarrow{ش} = س'\overrightarrow{و} + ع'\overrightarrow{ي} .$$

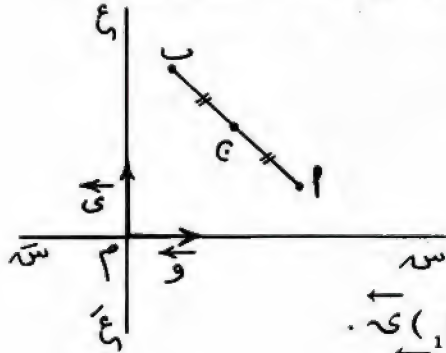
$$\begin{aligned} \text{إذن } \vec{Q} - \vec{T} &= (\vec{S} + \vec{W} + \vec{E}) - (\vec{S} + \vec{W} + \vec{E}) = \vec{0} \\ \vec{Q} - \vec{T} &= (\vec{S} - \vec{S}) + (\vec{W} + \vec{W}) + (\vec{E} - \vec{E}) = \vec{0} \end{aligned}$$

$\vec{Q} - \vec{T} = \vec{0}$  معناه  $(\vec{S} - \vec{S}) + (\vec{W} + \vec{W}) + (\vec{E} - \vec{E}) = \vec{0}$  وهذا يعني أن  
 $\vec{S} - \vec{S} = \vec{0}$  و  $\vec{W} + \vec{W} = \vec{0}$  (لأن مركبتي الشعاع المعلوم معدومتان معا).  
 أي :  $\vec{S} = \vec{S}$  و  $\vec{W} = \vec{W}$ .  
 نتيجة :

$$\begin{aligned} &(\vec{M}, \vec{W}, \vec{E}) \text{ معلم للمستوي ، } \vec{Q} \left( \begin{smallmatrix} \vec{S} \\ \vec{E} \end{smallmatrix} \right) \text{ و } \vec{T} \left( \begin{smallmatrix} \vec{S} \\ \vec{E} \end{smallmatrix} \right) \text{ شعاعان في المستوي} \\ &\left. \begin{aligned} \vec{S} &= \vec{S} \\ \vec{E} &= \vec{E} \end{aligned} \right\} \text{ معناه } \vec{Q} = \vec{T} \end{aligned}$$

#### مسألة 4 :

$(\vec{M}, \vec{W}, \vec{E})$  معلم للمستوي ؛  $\vec{A}(\vec{S}_1, \vec{E}_1)$  ،  $\vec{B}(\vec{S}_2, \vec{E}_2)$  نقطتان  
 من هذا المستوي . (الشكل 11) .  
 - لنبحث عن  $\vec{S}$  ،  $\vec{E}$  إحداثيي النقطة  $\vec{O}$  منتصف القطعة  $[\vec{AB}]$  .



الشكل 11

$\vec{O}$  منتصف القطعة  $[\vec{AB}]$   
 يعني أن الشعاعين  
 $\vec{AO}$  و  $\vec{BO}$  متعاكسان .  
 أي أن  $\vec{AO} = -\vec{BO}$  و  $\vec{BO} = -\vec{AO}$   
 ولكن  $\vec{AO} = (\vec{S}_1 - \vec{S}) + (\vec{E}_1 - \vec{E})$  و  $\vec{BO} = (\vec{S}_2 - \vec{S}) + (\vec{E}_2 - \vec{E})$

إذن  $(س - س_1) \vec{و} + (ع - ع_1) \vec{ى} +$

$$\vec{0} = (س - س_2) \vec{و} + (ع - ع_2) \vec{ى}$$

أي  $(س - س_1) \vec{و} + (س - س_2) \vec{و} +$

$$\vec{0} = (ع - ع_1) \vec{ى} + (ع - ع_2) \vec{ى}$$

$$\vec{0} = (س - س_1 + س - س_2) \vec{و} + (ع - ع_1 + ع - ع_2) \vec{ى}$$

$$\vec{0} = (س - س_1 - س_2) \vec{و} + (ع - ع_1 - ع_2) \vec{ى}$$

وهذا يعني أن :

$$0 = س - س_1 - س_2$$

$$0 = ع - ع_1 - ع_2$$

لأن مركبتي الشعاع المعلوم هما 0 ، 0 .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{س + س_1}{2} = س \\ \text{و} \end{array} \right\} \text{نستنتج أن}$$

$$\frac{ع + ع_1}{2} = ع$$

نتيجة :

إذا كانت  $(س_1 ، ع_1)$  ،  $(س_2 ، ع_2)$  إحداثيات النقطتين أ ، ب في المعلم  $(م ، و ، ى)$  فإن إحداثيي منتصف القطعة [أب] هما :

$$\frac{س + س_1}{2} \text{ و } \frac{ع + ع_1}{2}$$

مثال : أ (5 ، -4) ، ب (3 ، 2)

إحداثيا النقطة م منتصف [أب] هما :

$$س = \frac{3 + 5}{2} = 4 \text{ و } ع = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$$

## مسألة 5 :

(م، و، ع) معلم للمستوي ؛  $\vec{Q} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$  شعاع في المستوي .

ك عدد حقيقي .

- لنبرهن أن مركبتي الشعاع  $\vec{Q}$  هما ك س و ك ع .

البرهان :

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix} \quad \text{معناه} \quad \vec{Q} = س \vec{و} + ع \vec{ع}$$

ويكون :

$$ك \vec{Q} = ك (س \vec{و} + ع \vec{ع})$$

$$ك \vec{Q} = ك (س \vec{و}) + ك (ع \vec{ع}) .$$

$$ك \vec{Q} = (ك س) \vec{و} + (ك ع) \vec{ع} .$$

وهذا يعني أن مركبتي الشعاع  $\vec{Q}$  بالنسبة إلى الأساس (و، ع) هما ك س و ك ع .

$$\text{نكتب } ك \vec{Q} = \begin{pmatrix} ك س \\ ك ع \end{pmatrix} .$$

## مسألة 6 :

(م، و، ع) معلم للمستوي ؛  $\vec{Q} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$  و  $\vec{Q}' = \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$  شعاعان في

هذا المستوي .

- لنبرهن أنه إذا كان  $\vec{Q} // \vec{Q}'$  فإن  $س' ع - س ع' = 0$



البرهان :

$\overleftarrow{ق} // \overleftarrow{ق}$  يعني أنه يوجد عدد حقيقي  $ك$  بحيث  $\overleftarrow{ق} = ك \cdot \overleftarrow{ق}$

إذا كان  $\overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$  فإن  $ك \cdot \overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$

وبما أن  $\overleftarrow{ق} = ك \cdot \overleftarrow{ق}$  فإن  $\left. \begin{array}{l} س = ك \cdot س \dots (1) \\ ع = ك \cdot ع \dots (2) \end{array} \right\}$

من (1) يكون  $س = ك \cdot س$

ومن (2)  $ع = ك \cdot ع$

نستنتج أن  $س = ع$  أي  $س - ع = 0$

نتيجة :

$\overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}, \overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$  شعاعان في المستوي المزود بالمعلم  $(م، و، ع)$   
إذا كان  $\overleftarrow{ق} // \overleftarrow{ق}$  فإن  $س - ع = 0$

نقبل ما يلي :

$\overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}, \overleftarrow{ق} \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$  شعاعان في المستوي المزود بالمعلم  $(م، و، ع)$   
إذا كان  $س - ع = 0$  فإن  $\overleftarrow{ق} // \overleftarrow{ق}$

مثلا :

• الشعاعان  $\overleftarrow{ش}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  و  $\overleftarrow{ش}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  متوازيان لأن :

$$0 = \frac{1}{2} \times 3 - \left( \frac{3}{4} - \right) \times (2 -)$$

• الشعاعان  $\overleftarrow{\text{ش}} \left( \frac{5}{3} - \right)$  و  $\overleftarrow{\text{ش}} \left( \frac{7}{4} - \right)$  غير متوازيين لأن :

$$0 \neq (7 -) \times 3 - 4 \times (5 -)$$

(1) - هل الشعاعان  $\overleftarrow{\text{ق}} \left( \frac{1}{2} - \right)$  و  $\overleftarrow{\text{ج}} \left( \frac{1}{6} - \right)$  متوازيان ؟

- هل الشعاعان  $\overleftarrow{\text{ق}} \left( \frac{2}{3} - \right)$  و  $\overleftarrow{\text{ج}} \left( \frac{5}{3} - \right)$  متوازيان ؟

(2) الف ، ب ، ج ، د أربع نقط حيث :

$$\overleftarrow{\text{أ}} \left( \frac{5}{2} - \right) ; \overleftarrow{\text{ب}} \left( \frac{10}{12} - \right) ; \overleftarrow{\text{ج}} \left( \frac{1}{1} - \right)$$

- يبين أن النقاط الف ، ب ، ج ، د على استقامة واحدة .

- يبين أن النقاط الف ، ب ، د ليست على استقامة واحدة .

## تمارين

في التمارين من 1 إلى 6 ، نعتبر المستقيم (ق) مزوداً بمعلم (م ، و) .

1. أ ، ب ، ح ثلاث نقط من (ق) بحيث أ (-3) ، ب (+4) ، ح (-1,5) .

احسب  $\overline{أب}$  ،  $\overline{ب ح}$  ،  $\overline{أ ح}$  ثم  $\overline{أب} + \overline{ب ح}$

(2) عيّن على المستقيم (ق) النقطتين د ، هـ بحيث :

$$\overline{م د} = \frac{7}{2} ، \overline{م هـ} = -2,5$$

(3) عيّن النقطة و بحيث  $\overline{و هـ} = -4$  .

2. أ ، ب ، ح ، د أربع نقط من المستقيم (ق) بحيث :

أ (-5) ، ب (+10) ؛ ح (-3) ؛ د (+7)

(1) احسب كلاً من  $\overline{أب}$  ،  $\overline{ب ح}$  ،  $\overline{ح د}$  ،  $\overline{أ د}$  .

(2) تحقق أن  $\overline{أب} + \overline{ب ح} + \overline{ح د} + \overline{أ د} = 0$

3. أ ، ب ، ح ثلاث نقط من (ق) بحيث :

أ (+2) ، ب (-3) ، ح (-5) .

(1) احسب  $\overline{ب ح}$  ،  $\overline{ح أ}$  ،  $\overline{أ ب}$  .

(2) تحقق أن :  $\overline{م أ} . \overline{ب ح} + \overline{م ب} . \overline{ح أ} + \overline{م ح} . \overline{أ ب} = 0$  .

4. أ ، ب ، ح نقط من (ق) فواصلها على الترتيب :  $\frac{5}{2}$  ،  $\frac{7}{2}$  ،  $\frac{9}{2}$  .

(1) احسب فاصلة النقطة و منتصف  $\overline{أب}$  [أ ب] .

(2) احسب كلاً من  $\overline{ح أ}$  ،  $\overline{ح ب}$  ،  $\overline{ح و}$  .

(3) بين أن  $\overline{ح أ} + \overline{ح ب} = 2 \overline{ح و}$  .

5. أ ، ب ، ح ، د نقط من (ق) بحيث أ (-5) ؛ ب (-3) ؛ ح (+1) ؛

د (+6)

(1) احسب المجموع :  $\overline{أ د} . \overline{ب ح} + \overline{أ ب} . \overline{ح د} + \overline{أ ح} . \overline{ب د}$

- (2) احسب فاصلة النقطة ه منتصف القطعة [أب].  
 (3) احسب فاصلة النقطة د منتصف القطعة [حز].  
 (4) احسب العدد الحقيقي ه.  
 (5) إذا كانت فواصل النقط أ، ب، ح، د هي الأعداد ط، ل، م، ن، ك على الترتيب.

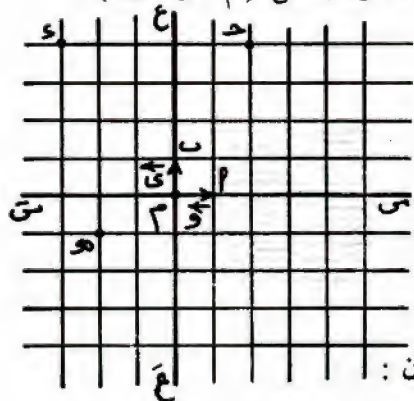
احسب المجموع :  $\overline{أ.ب} + \overline{ب.ح} + \overline{ح.د} + \overline{د.أ}$   
 بدلالة الأعداد ط، ل، م، ن، ك.

6. أ، ب، ح، د نقط من مستقيم (ق) فواصلها على الترتيب : -2، 8، -22، 2.

- (1) احسب فاصلة النقطة د منتصف القطعة [أب].  
 (2) احسب كلاً من :  $\overline{أ.ب}$ ،  $\overline{ب.ح}$ ،  $\overline{ح.د}$ ،  $\overline{د.أ}$ ،  $\overline{أ.ح}$ ،  $\overline{أ.د}$ .  
 (3) تحقق أن  $(\overline{أ.ب})^2 = \overline{أ.ح} \cdot \overline{ب.د}$ .

(4) تحقق أن  $\frac{1}{\overline{أ.ب}} + \frac{1}{\overline{ب.ح}} = \frac{2}{\overline{أ.د}}$

في التمارين الآتية نعتبر المستوي مزوداً بمعلم متعامد ومتجانس (م، و، ن).



الشكل 12

7. إليك الشكل 12.

حيث م = أ = و، م = ب = ن.

(1) أكمل ما يلي :

$\overline{أ.ب} = \overline{أ.و} + \overline{و.ب}$

$\overline{ب.ح} = \overline{ب.د} + \overline{د.ح}$

$\overline{ح.د} = \overline{ح.و} + \overline{و.د}$

$\overline{د.أ} = \overline{د.و} + \overline{و.أ}$

$\overline{أ.ح} = \overline{أ.و} + \overline{و.ح}$

$\overline{ب.د} = \overline{ب.و} + \overline{و.د}$

8. (1) أ، ب نقطتان، حيث  $\overline{أ.ب} = 5 - \frac{3}{2}$ ،  $\overline{ب.أ} = 4 - \frac{2}{3}$ .

احسب إحداثي النقطة ح منتصف القطعة [أب].



$$(2) \text{ هـ } \left( \frac{5}{3}, \frac{1}{2} \right) \text{ و ف } (-2, 5, -3).$$

أوجد إحداثيي النقطة هـ نظيرة هـ بالنسبة إلى المبدأ م .  
أوجد إحداثيي النقطة ف نظيرة ف بالنسبة إلى م .

9. ((س'س)، و) هو محور الفواصل، ((ع'ع)، ى) محاور الترتيب .

(1) أوجد إحداثيات نظائر كل من النقط الآتية بالنسبة إلى (س'س) :

$$أ \left( \frac{2}{3}, 1 \right) ؛ ب \left( \frac{3}{4}, 2, 5 \right) ؛ ج \left( \frac{5}{2}, 0 \right) ؛ د (-3, 5, 0).$$

(2) أوجد إحداثيات نظائر كل من النقط الآتية بالنسبة إلى (ع'ع) :

$$هـ (2, -4) ؛ هـ \left( 5, \frac{7}{4} \right) ؛ ف \left( 0, \frac{1}{3} \right) ؛ و \left( \frac{5}{3}, 0 \right).$$

في التمارين من 12 إلى 16 نعتبر (م، و، ى) معلما للمستوي .

10. أ، ب نقطتان من هذا المستوي، بحيث :

$$أ (-5, 3) ؛ ب (6, -2).$$

(1) احسب إحداثيي هـ منتصف القطعة [أ ب] .

(2) ج (5, 5) نقطة في نفس المستوي

احسب إحداثيي النقطة ث مركز ثقل المثلث أ ب ج .

$$(3) \text{ تحقق أن } \vec{ث} = \vec{أ} + \vec{ب} + \vec{ج} = \vec{0}$$

11. أ ب ج مثلث ؛ (أ، ب، ج) معلم للمستوي .

(1) عيّن في هذا المعلم إحداثيات النقط أ'، ب'، ج' منتصفات القطع [أ ب] ،

[أ ج] ، [ب ج] على الترتيب .

$$(2) \text{ يبين أن } \vec{أ} = 2 \vec{ج'}$$

12. (1) علّم النقط أ (-2, 1) ؛ ب (4, -1) ؛ ج (5, 5, 3) ؛

$$هـ (1, -2)، د (1, 2).$$

بالنسبة إلى المعلم (م، و، ى) .

ا، اء، اى، اه، ب، با، بي، بو، ج، جا، جي، جو، د، دا، دي، دو، هـ، ها، هي، هو.

(3) بَيِّنْ أَنَّ الشَّعَاعِينَ الْحَوَاذِ مُتَوَازِيَانِ وَأَنَّ  $\vec{AD}$  وَ  $\vec{BE}$  مُتَوَازِيَانِ ، وَأَنَّ الشَّعَاعِينَ  $\vec{AH}$  وَ  $\vec{BE}$  مُتَعَاكِسَانِ .

13. 1) هل الشعاع  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  يوازي الشعاع  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  ؟

2. هل الشعاع  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  يوازي الشعاع  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  ؟

3) هل الشعاع  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  يوازي الشعاع  $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$  ؟

14. 1) عَيْنٌ فِي الْمُسْتَوَى الْمَزُودِ بِالْمَعْلَمِ (م، و، ي) النقط :

$$. (5, 5-) \succ ; (4, 3-) \hookrightarrow ; (2, 1)!$$

(2) بين أن الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$ ،  $\overrightarrow{AC}$  متوازيان واستنتج أن النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  على استقامة واحدة.

15. و، ی شعاان غیر معدومین و غیر متوازیں .

(1) وَ، كُ شُعَاعَانِ بِحِثِّ :

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

احسب مركبتي كل من الشعاعين  $(\vec{e} + \vec{k})$  و  $(\vec{e} - \vec{k})$  بالنسبة إلى الأساس  $(\vec{e}, \vec{e})$ .

(2) لی شعاع بجیٹ لی  $4 = \frac{3}{5} + 4$

اكتب كلاً من الأشعة  $\vec{2}$ ،  $-\frac{5}{4}\vec{1}$ ،  $3\vec{1}$  بالنسبة إلى الأساس  $(\vec{u}, \vec{v})$ .

16.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ، و نقط من المستوي المزود بالمعلم  $(\vec{m}, \vec{w}, \vec{y})$  بحيث

$$\vec{a} = (4, 3) ; \vec{b} = (0, 5) ; \vec{c} = (2, -5) ; \vec{d} = (-3, 2)$$

(1) علّم هذه النقط .

(2) برهن أن الرباعي  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}\vec{d}$  متوازي أضلاع .

(3) احسب إحداثي مركز تناظره  $\vec{h}$  .

17.  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  مثلث .  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$  ثلاث نقط بحيث :

$$\vec{a}\vec{l} = \frac{3}{5}\vec{a}\vec{b} ; \vec{b}\vec{m} = \frac{2}{3}\vec{b}\vec{c} ; \vec{c}\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{c}\vec{a}$$

(1) عبّر عن كل من الأشعة  $\vec{b}\vec{c}, \vec{c}\vec{a}, \vec{a}\vec{b}$ ،  $\vec{a}\vec{m}, \vec{b}\vec{n}, \vec{c}\vec{l}$  بدلالة الشعاعين  $\vec{a}\vec{b}, \vec{a}\vec{c}$

(2) عيّن مركبتي كل من الشعاعين  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$  بالنسبة إلى الأساس  $(\vec{a}\vec{b}, \vec{a}\vec{c})$  .

(3) بيّن أن النقط  $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$  على استقامة واحدة .

18.  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  مثلث مركز ثقله  $\vec{t}$  .

(1)  $\vec{h}$  نقطة من المستوي . برهن أن :  $\vec{h} = \vec{a}\vec{t} + \vec{b}\vec{t} + \vec{c}\vec{t} = 3\vec{h}\vec{t}$  .

(2)  $\vec{a}'$  هي نظيرة  $\vec{a}$  بالنسبة إلى  $\vec{b}$  ،  $\vec{b}'$  هي نظيرة  $\vec{b}$  بالنسبة إلى  $\vec{c}$  ؛  $\vec{c}'$  هي نظيرة  $\vec{c}$  بالنسبة إلى  $\vec{a}$  .

- برهن أن  $\vec{t}$  هي أيضا مركز ثقل المثلث  $\vec{a}'\vec{b}'\vec{c}'$  .

إرشاد : في السؤالين (1) ، (2) نستعمل النظرية الآتية :

$$\vec{t} \text{ مركز ثقل المثلث } \vec{a}\vec{b}\vec{c} \text{ معناه } \vec{t} = \vec{a}\vec{t} + \vec{b}\vec{t} + \vec{c}\vec{t} = \vec{0}$$

(3) عيّن النقطة  $\vec{h}$  بحيث  $\vec{a}\vec{h} = 2\vec{c}\vec{h}$  .

$\vec{m}, \vec{w}, \vec{y}$  هي منتصفات  $[\vec{a}\vec{b}]$  ،  $[\vec{b}\vec{c}]$  ،  $[\vec{c}\vec{a}]$  على الترتيب .

- برهن أن كلا من الرباعيات  $\vec{a}\vec{m}\vec{w}\vec{y}$  ،  $\vec{y}\vec{w}\vec{h}\vec{c}$  ،  $\vec{m}\vec{b}\vec{w}\vec{y}$  هو متوازي أضلاع .

(4) استنتج أن النقط  $\vec{m}, \vec{w}, \vec{h}$  على استقامة واحدة .

وأن  $\vec{h}$  هي منتصف الضلع  $[\vec{a}'\vec{b}']$  .

## المعادلات وجمل المعادلات

7

المعادلات من الدرجة الأولى في ح

1. مفهوم المعادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد في ح :

• مسألة : تا و ها تطبيقان من ح إلى ح حيث :  
تا (س) =  $5 - س$  ؛ ها (س) =  $3 + س$  .

- أكمل الجدول الآتي بحساب القيم العددية للتطبيقين تا و ها .

0,6	1,3	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	س
	4,5	$\frac{31}{2}$	$\frac{9}{2}$			تا (س) = $5 - س$
		$\frac{31}{2}$		8		ها (س) = $3 + س$

لاحظ ما يلي :

(1) من أجل  $س = \frac{7}{2}$  لدينا تا (س) = ها (س) .

(2) من أجل القيم الأخرى للمتغير س ، تا (س)  $\neq$  ها (س) .

• الكتابة تا (س) = ها (س) أي  $5 - س = 3 + س$  تسمى

معادلة في ح . طرفها الأول تا (س) وطرفها الثاني ها (س) .

المتغير س يسمى **المجهول** وأسه هو 1 لذلك نقول إن هذه المعادلة من **الدرجة الأولى** .



- العدد الحقيقي  $\frac{7}{2}$  يسمى حلاً لهذه المعادلة لأن  $\left(\frac{7}{2}\right) \text{ها} = \left(\frac{7}{2}\right) \text{تا}$ .

بينما كل من الأعداد 0 ، 1 ،  $-\frac{1}{2}$  ، 3 ، 1 ، 0 ، 6 ليس حلاً لها . ( لماذا ؟ ) .

مجموعة الأعداد الحقيقية  $\text{س}$  التي يكون من أجلها  $\text{تا}(\text{س}) = \text{ها}(\text{س})$  تسمى مجموعة حلول هذه المعادلة ونرمز لها بالرمز مج .

حل معادلة هو إيجاد مجموعة حلولها

أمثلة عن معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد في ج .

$$\sqrt{2}\text{س} = 2- \text{؛} \quad \frac{2}{3}\text{س} + 1 = 5 \text{س} \text{؛} \quad \text{س} \sqrt{2} - 3 = \frac{1}{2}\text{س} .$$

$$0 = \frac{3-\text{س}}{3} - \frac{1+\text{س}}{2}$$

بعد التحويلات التي نجريها على كلٍّ من هذه المعادلات نحصل على معادلات من

الشكل :  $\text{س} = \text{ب}$  ( حيث  $\text{ب} \neq 0$  )

ملاحظة 1 :

$\text{تا}(\text{س}) = \text{ها}(\text{س})$  معناه  $\text{تا}(\text{س}) - \text{ها}(\text{س}) = 0$   
 $\text{تا}(\text{س}) - \text{ها}(\text{س}) = 0$  هي أيضاً معادلة طرفها الأول  $\text{تا}(\text{س}) - \text{ها}(\text{س})$   
 وطرفها الثاني 0 .

## ملاحظة 2 :

إذا كان لمعادلتين نفس مجموعة الحلول فنقول إنهما متكافئتان .

مثلاً المعادلتان  $2س - 1 = 4$  و  $2س - 5 = 0$  متكافئتان

وبالعكس : إذا كان لدينا معادلتان متكافئتان ، فكلُّ حلٍّ لإحدهما هو حلٌّ للآخرى .

عملياً لحل معادلة نستبدلها بمعادلة مكافئة لها أبسط منها .

## 2. حلّ معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

### مثال 1 :

- لنحلّ في المجموعة ح المعادلة  $5س - 2 = 3س + 5$  .

أي لنبحث عن مجموعة حلولها .

الحل :

- نعلم أن  $5س - 2 = 3س + 5$  يعني أن

$$5س - 2 = (3س -) + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

$$5س - 2 = 3س + 5$$

لاحظ كيفية نقل الحدود من طرف إلى آخر :

$$5 + \textcircled{3س} = \textcircled{2س} + 5$$

$$\textcircled{2س} + 5 = \textcircled{3س - 2س}$$

مثال 2 :

- لنحلّ في ح المعادلة :

$$\frac{7 - 3س}{5} = 1 + 2س$$

الحل :

$$0 = \frac{7 - 3س}{5} - (1 + 2س) \quad \text{يعني أن} \quad \frac{7 - 3س}{5} = 1 + 2س$$

بعد توحيد المقامين نجد :

$$0 = \frac{7 - 3س}{5} - \frac{(1 + 2س) 5}{5}$$

$$0 = \frac{(7 - 3س) - (1 + 2س) 5}{5} \quad \text{أي}$$

$$0 = (7 - 3س) - (1 + 2س) 5 \quad \text{ومنه}$$

$$0 = 7 + 3س - 5 + 10س$$

$$0 = (7 + 5) + (3س - 10س)$$

$$0 = 12 + 7س$$

$$\frac{12}{7} - = 7س \quad \text{ومنه} \quad 12 - = 7س$$

$$\text{لنتحقق أن : } \left( \frac{12}{7} - \right)^2 = 1 + \frac{7 - \left( \frac{12}{7} - \right)^3}{5}$$

$$\text{نستنتج أن : مع } \left\{ \frac{12}{7} - \right\}$$

- حل في مع المعادلات الآتية :

$$(1) \quad 0 = \frac{116 + س}{4} - \frac{4 + س}{5}$$

$$(2) \quad \frac{1 - س}{15} + 2 = \frac{4 - س}{3} + \frac{4 + س}{3}$$

مثال 3 :

- لنحل في مع المعادلة :  $4(2 + س) = 4 + 5س$

الحل : لدينا  $4(2 + س) = 4 + 5س$

$$\text{أي } 4س + 8 = 4 + 5س$$

$$4س - 5س = 4 - 8$$

$$\text{أي } 0س = -3$$

نعلم أنه لا يوجد عدد حقيقي س بحيث  $0س = -3$

(لأن  $0س = 0$ ) ، نقول إن مجموعة حلول هذه المعادلة هي المجموعة الخالية

أي مع  $\phi$ .



بصفة عامة :

كل معادلة من الشكل  $0 = س + ب$  حيث  $ب \neq 0$   
ليس لها حل في  $ج$  أو مجموعة حلولها هي المجموعة الخالية .

مثال 4 :

$$\text{لنحلّ في } ج \text{ المعادلة : } 6س + 5 = 2 \left( 3س + \frac{5}{2} \right) .$$

بعد التحويلات اللازمة نحصل على المعادلة :

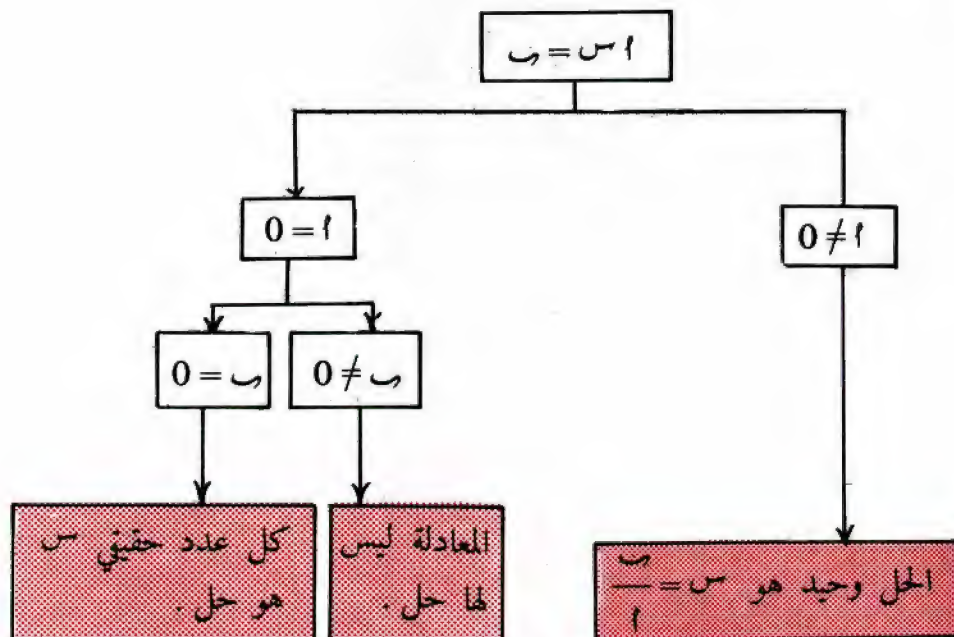
$$0 = س . 0$$

- لاحظ أن كل عدد حقيقي  $س$  يحقق هذه المعادلة .  
فمجموعة حلول هذه المعادلة هي المجموعة  $ج$  .

بصفة عامة :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ لها حلّ وحيد وهو } \frac{ب}{-1} \text{ إذا كان } 1 \neq 0 . \\ \bullet \text{ لها عدد غير منته من الحلول إذا كان } 1 = 0 , ب = 0 \\ \bullet \text{ وليس لها حلّ إذا كان } 1 = 0 \text{ و } ب \neq 0 . \end{array} \right\} \text{المعادلة } 1س = ب$$

خلاصة :



3. حل بعض المعادلات التي تقود إلى معادلات من الدرجة الأولى في ج :

مثال 1 :

- لنحلّ في ج المعادلة  $\frac{3}{7}س^2 = \frac{1}{5}س$  .

الحل :

- أكبر أس للمجهول س هو 2 فنقول إن هذه المعادلة من الدرجة الثانية .

$$\frac{3}{7}س^2 = \frac{1}{5}س \text{ يعني أن } \frac{3}{7}س^2 - \frac{1}{5}س = 0 \dots (1)$$

$$\cdot \left( \frac{1}{5} - س \frac{3}{7} \right) س = س \frac{1}{5} - س^2 \frac{3}{7} \quad \text{لكن}$$

$$\left. \begin{array}{l} 0 = س \\ \text{أو} \\ 0 = \frac{1}{5} - س \frac{3}{7} \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 = \text{معناه} \\ \left( \frac{1}{5} - س \frac{3}{7} \right) س \end{array}$$

$$\cdot \frac{7}{15} = س \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{5} = س \frac{3}{7} \quad \text{أن يعني} \quad 0 = \frac{1}{5} - س \frac{3}{7}$$

نستنتج أن العددين 0 ،  $\frac{7}{15}$  حلان للمعادلة (1)

$$\cdot \frac{7}{15} \times \frac{1}{5} = \left( \frac{7}{15} \right)^2 \times \frac{7}{3} \quad \text{وأن} \quad 0 \times \frac{1}{5} = (0)^2 \times \frac{7}{3}$$

$$\cdot \left\{ \frac{7}{15}, 0 \right\} = \text{مجموع حلول المعادلة (1) هي مج}$$

مثال 2 :

- لنحلّ في مع المعادلة

$$\cdot (س + 5) 3 - 2س^2 - 10س = 7س - 35 \dots (1)$$

الحل :

هذه المعادلة من الدرجة الثانية نستبدلها بالمعادلة الآتية :

$$0 = 35 + س 7 + س 10 - 2س^2 - (س + 5) 3$$

$$(س + 5) 3 - 2س^2 - 10س = 7س - 35$$

$$\cdot \text{وأن} \quad 7س - 35 = (س + 5) 3$$

إذن :

$$0 = (5 + س) 7 + (5 + س) 2 - (5 + س) 3$$

$$0 = (7 + س 2 - 3) (5 + س)$$

$$0 = (10 + س 2 -) (5 + س)$$

$$0 = 2 \times (5 + س -) (5 + س)$$

$$0 = (5 + س -) (5 + س) \quad \text{أن} \quad 0 = (5 + س -) (5 + س) 2 \quad \text{يعني} \quad (0 \neq 2)$$

$$\text{وأن} \quad 0 = 5 + س - \quad \text{أو} \quad 0 = 5 + س$$

$$س = 5 - \quad \text{يعني} \quad 0 = 5 + س$$

$$\text{و} \quad 0 = 5 + س - \quad \text{يعني} \quad س = 5$$

إذا عوضنا س بأحد العددين  $5 -$  ،  $5$  في المعادلة (1) نجد أن كلاهما يحقق هذه المعادلة .

$$\{ 5 - , 5 \} = \text{مجم}$$

مثال 3 :

- لنحلّ في ح المعادلة  $9س^2 - 13 = 12$  ..... (1)

الحل :

$$9س^2 - 13 = 12 \quad \text{يعني} \quad 9س^2 - 25 = 0$$

$$9س^2 - 25 = (3س - 5) (3س + 5) = 0$$

$$(3س - 5) (3س + 5) = 0 \quad \text{معناه} \quad 0 = (3س - 5) \quad \text{أو} \quad 0 = (3س + 5)$$

$$\text{أي} \quad \left[ \frac{5}{3} = س \quad \text{أو} \quad \frac{5}{3} = -س \right]$$



لنتحقق أن  $9 = 13 - \left(\frac{5}{3}\right)^2$  وأن  $12 = 13 - \left(\frac{5}{3}\right)^2$  .

إذن مجموعة حلول المعادلة (1) هي  $\left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$  .

حلّ في ج المعادلات الآتية :

$$(1) \quad 0 = 4s - \frac{8}{5} - s^2$$

$$(2) \quad 0 = 9s - 6 - s^2$$

$$(3) \quad (1 + 3s)(2 + s) = (3 - s)(1 + 3s)$$

جمل المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين

### 1. المعادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين :

(س، ع) ثنائية مرتبة من  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  .

أكمل الجدول الآتي بحساب القيم العددية لكل من :

$2s + 3 - ع$  و  $5s - 2 - ع$  .

(0,3 ، 1,5)	$(\frac{2}{5}, 1 - )$	$(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$	(0، 0)	$(\frac{1}{5}, 0)$	(1، 0)	(س، ع)
					2	$2s + 3 - ع$
					2 -	$5s - 2 - ع$

تلاحظ من الجدول ما يلي :

(1) توجد ثنائيات مرتبة (س، ع) من  $ع \times ع$  بحيث :  
 $2س + 3ع - 1 = 5س - 2ع$  .

(2) توجد ثنائيات مرتبة (س، ع) من  $ع \times ع$  بحيث :  
 $2س + 3ع - 1 \neq 5س - 2ع$  .

إن  $2س + 3ع - 1 = 5س - 2ع$  تسمى **معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين في ع، س**  
طرفها الأول  $2س + 3ع - 1$  وطرفها الثاني  $5س - 2ع$  .

**س، ع هما المجهولان في هذه المعادلة**

كل ثنائية مرتبة (س، ع) من  $ع \times ع$  يكون من أجلها :  
 $2س + 3ع - 1 = 5س - 2ع$  تسمى حلاً لهذه المعادلة .

مثلاً (2-، 1-) هي حل لها بينما (1،  $\frac{1}{5}$ ) ليست حلاً لهذه المعادلة لأن

$$\left( \frac{1}{5} \times 2 - 1 \times 5 \neq 1 - \frac{1}{5} \times 3 + 1 \times 2 \right)$$

**حل هذه المعادلة هو إيجاد مجموعة حلولها ، أي إيجاد مجموعة الثنائيات المرتبة من  $ع \times ع$  التي تحققها .**

**ملاحظة 1 :**

كلما أخذنا قيمة لأحد المجهولين أمكننا حساب قيمة المجهول الآخر وذلك بحل معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .  
هذا يعني أن مجموعة حلول معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين هي مجموعة غير منتهية .

مثلاً :

• إذا كان  $س = 0$  فإن  $0 = 3 + 0 \times 2 - 1 - 0 \times 5 = 2 - ع$

$$\text{أي } 3 - ع = 1 - 2 = ع \text{ ومنه } ع = \frac{1}{5}$$

• إذا كان  $ع = 2$  فإن  $2 = 5 - س$  فإن  $2 = 5 - س$   $س = 3$

$$\text{ومنه } 2 - س = 5 - س = 4 - 1 + 6 - س = 3 - س$$

$$3 - س = 9 - س$$

$$\text{أي } س = 3$$

ملاحظة 2 :

$$(2 + س + 3 - ع = 1 - 5 + س = 2 - ع) \text{ يعني أن}$$

$$(2 + س + 3 - ع) - (1 - 5 + س) = 2 - ع - (2 - ع) = 0$$

$$\text{أي } 0 = 1 - 5 + س + 3 - ع$$

وبصفة عامة :

كل معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين  $س، ع$

تؤول بعد التحويلات اللازمة إلى معادلة من الشكل :

$$س + ب + ع + ح = 0 \text{ حيث } 0 \neq 1, 0 \neq ب$$

ومجموعة حلولها هي مجموعة جزئية غير منتهية من  $ع \times س$

ملاحظة 3 :

المعادلتان المتكافئتان هما معادلتان لها نفس مجموعة الحلول .

مثلاً : المعادلات الآتية متكافئة :

$$3 - س = 2 + ع = 5 + 0, 0 = 6 - س + 4 - ع = 10 - 0,$$

$$- 2 + س + ع = 7 - 4 = س - 3 + 3 .$$

## 2. جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين في ج :

### مسألة :

اشترى تلميذ كتابين أحدهما للرياضيات والآخر للعلوم بمبلغ 16 د.ج ، فإذا كان ثمن 5 كتب للرياضيات يزيد 17 د.ج عن ثمن كتابين للعلوم ، فما ثمن كل من الكتابين ؟

### تفسير هذه المسألة :

كل من ثمن كتاب الرياضيات و ثمن كتاب العلوم مجهول ،  
نرمز للأول بالرمز س وللثاني بالرمز ع .

فيكون  $س + ع = 16$  و  $5س = 2ع + 17$  .

كل من  $س + ع = 16$  و  $5س = 2ع + 17$  هي :

### معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين .

تعلم أن كلاً من هاتين المعادلتين لها عدد غير منته من الحلول في المجموعة  $س \times ع$  .

مثلاً : كل من الثنائيات المرتبة ( 6 ، 10 ) ، ( 5,5 ، 10,5 ) ، ( 7 ، 9 ) هي حل للمعادلة الأولى .

وكل من الثنائيات المرتبة ( 6,5 ، 6 ) ، ( 7 ، 9 ) ، ( 8 ، 11,5 ) هي حل للثانية .

لاحظ أن الثنائية المرتبة ( 7 ، 9 ) هي حل مشترك للمعادلتين  $س + ع = 16$  ،  
 $5س = 2ع + 17$  معاً .

البحث عن مجموعة الحلول المشتركة لهاتين المعادلتين يسمى حل جملة المعادلتين التي نكتبها على الشكل :

$$\left. \begin{array}{l} س + ع = 16 \\ 5س = 2ع + 17 \end{array} \right\}$$



بصفة عامة :

حل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين في المجموعة  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  هو إيجاد مجموعة الثنائيات المرتبة (س، ع) من  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  التي تحقق المعادلتين في آن واحد .  
• وعملياً لحلّ جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين ، نستبدل كل معادلة بمعادلة أبسط منها ومكافئة لها .

3. حل جملة معادلتين بمجهولين حقيقيين من الدرجة الأولى :  
توجد تقنيات تسمح بحل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين وتسمى طرق حل جملة معادلتين .

(1) طريقة الحل بالتعويض :

مثال : - لنحلّ في  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  الجملة الآتية بطريقة التعويض .

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \text{س} + \text{ع} = 16 \dots\dots\dots \\ (2) \quad 5\text{س} + 2\text{ع} = 17 \dots\dots\dots \end{array} \right\}$$

الحل :

نعبّر عن أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين .  
مثلاً نستنتج من المعادلة (1) أن  $\text{س} = 16 - \text{ع}$  .  
لنعوّض س بالعدد  $16 - \text{ع}$  في المعادلة (2) فنجد :

$$17 = 5(16 - \text{ع}) + 2\text{ع}$$

$$17 = 80 - 5\text{ع} + 2\text{ع}$$

$$17 = 80 - 3\text{ع}$$

$$7 - ع = 80 - 17$$

$$7 - ع = 63 - \text{ ومنه } ع = \frac{63 - 7}{7}$$

$$\boxed{ع = 9}$$

نعوض في المعادلة (1) ع بالعدد 9 فنجد :

$$س = 16 - ع$$

$$س = 16 - 9$$

$$\boxed{س = 7}$$

أي

نستنتج أن ثمن كتاب الرياضيات هو 7 د.ج ، و ثمن كتاب العلوم هو 9 د.ج .

$$\left. \begin{array}{l} س + ع = 16 \\ 5 س - 2 ع = 17 \end{array} \right\} \text{ تحقق أن } (7, 9) \text{ هو حل للجملة}$$

إذن فمجموعة حلول هذه الجملة هي مج =  $\{(7, 9)\}$  .

- حل في  $ع \times ح$  كلاً من الجمل الآتية :

$$\left. \begin{array}{l} 10 = \frac{7}{10} - ع \frac{5}{12} + س \frac{7}{8} \\ 0 = \frac{14}{15} - ع \frac{5}{9} + س \frac{7}{6} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 7 = \frac{ع}{3} + \frac{س}{2} \\ 8 = \frac{ع}{2} + \frac{س}{3} \end{array} \right\}$$

(2) طريقة الحل بالجمع :

مثال : لنحل في  $ع \times ح$  الجملة الآتية بطريقة الجمع :

$$\left. \begin{array}{l} س + ع = 16 \dots\dots (1) \\ 5 س - 2 ع = 17 \dots\dots (2) \end{array} \right\}$$

لاحظ ما يلي :

- إذا ضربنا طرفي المعادلة (1) في العدد 2 نحصل على معادلة مكافئة لها ونحصل

$$\left. \begin{array}{l} 32 = 2 + 2س \\ 17 = 2 - 5س \end{array} \right\} \text{على الجملة}$$

حيث جعلنا معاملي ع في المعادلتين متعاكسين .

$$\left. \begin{array}{l} 32 = 2 + 2س \\ 17 = 2 - 5س \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2 \times \\ 1 \times \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} .... 16 = ع + س \\ .... 17 = 2 - 5س \end{array} \right\} \text{أي}$$

وبالجمع نجد :

$$. 17 + 32 = (2 - 5س) + (2 + 2س)$$

$$. 49 = 2 - 5س + 2 + 2س$$

$$. 49 = (2 - ع 2) + (س 5 + 2س)$$

$$\frac{49}{7} = س \quad \text{ومنه} \quad 49 = س 7$$

$$\boxed{\text{أي} \quad س = 7}$$

نتبع نفس الطريقة لإيجاد قيمة ع .

$$\left. \begin{array}{l} 80 - = 5 - 5س - ع \\ 17 = 2 - 5س \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} (5 -) \times \\ 1 \times \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} .... 16 = ع + س \\ .... 17 = 2 - 5س \end{array} \right\}$$

وبالجمع نجد :

$$. 17 + (80 -) = (2 - 5س) + (5 - 5س - ع)$$

$$63 - = 2 - 5س + 5 - 5س - ع$$

$$63 - = (5س + 5س) + (2ع - 5ع)$$

$$\frac{63 -}{7 -} = 7ع - \text{ ومنه } 63 - = 7ع -$$

$$\boxed{9 = ع} \text{ أي}$$

يمكننا أن نتحقق أن (7 ، 9) هي حل للجملّة السابقة .  
نستنتج أن : مج = { (7 ، 9) } .

(3) طريقة الحل بالجمع والتعويض

مثال :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots 6 = 5ع - 3س \\ (2) \dots\dots 3 - = 4س + 2ع \end{array} \right\} \text{ لنحلّ في } ع \times \text{ الجملّة :}$$

$$\left. \begin{array}{l} 12 = 10ع - 6س \\ 9 = 12ع - 6س \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xleftarrow{2 \times} 6 = 5ع - 3س \\ \xleftarrow{(3 -) \times} 3 - = 4س + 2ع \end{array}$$

بالجمع نحصل على المعادلة  $9 + 12 = 12ع - 10ع$

$$21 = 2ع -$$

$$\boxed{\frac{21}{22} = ع}$$

لنعوّض بالعدد  $\frac{21}{22}$  في إحدى المعادلتين مثلاً في الثانية

$$3 - = 4س + 2ع$$

$$3 - = \left( \frac{21}{22} \right) \times 4 + 2س$$



$$\left( \frac{21}{22} - \right) \times 4 - 3 = 2 \text{ س}$$

$$\frac{42}{11} + 3 = 2 \text{ س}$$

$$\frac{42 + 33}{11} = 2 \text{ س}$$

$$\boxed{\frac{9}{22} = \text{س}} \quad \text{ومنه} \quad \frac{9}{11} = 2 \text{ س}$$

لتتحقق أن الثنائية  $\left( \frac{21}{22} - , \frac{9}{22} \right)$  هي حل للجملّة المفروضة .

فمجموعة حلول هذه الجملّة هي : مج =  $\left\{ \left( \frac{21}{22} - , \frac{9}{22} \right) \right\}$

حل في ع × ح كلاً من الجمل الآتية :

$$\left. \begin{aligned} 28 &= \frac{\text{ع} - \text{س}}{5} - \frac{\text{ع} + \text{س}}{3} \\ 60 &= \frac{\text{ع} + \text{س}}{4} + \frac{\text{ع} - \text{س}}{2} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 3 &= \frac{1 + \text{ع}}{3} - \frac{1 + 2\text{س}}{4} \\ (1 + 2\text{س}) 3 &= (2 + \text{ع}) 2 \end{aligned} \right\}$$

#### 4. حالات خاصة :

مثال 1 : لنحلّ في  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  الجملة الآتية :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 4 - s = \frac{e}{2} + 2 - \dots\dots\dots \\ (2) \quad \dots\dots\dots \frac{10}{3} - = \frac{5e}{6} + s - \frac{20}{3} \end{array} \right\}$$

بعد توحيد المقامات نحصل على الجملة الآتية :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{4 - s}{2} = \frac{e + 4 - s}{2} \\ \frac{20}{6} - = \frac{5e + 40 - 3s}{6} \end{array} \right\}$$

ومنها نحصل على الجملة :

$$\left. \begin{array}{l} (1)' \dots\dots\dots 4 - = e + s - 8 \\ (2)' \dots\dots\dots 20 - = 5e + s - 40 \end{array} \right\}$$

لاحظ أنه إذا ضربنا طرفي المعادلة (1)' في 5 نحصل على المعادلة المكافئة (2)' ، أو إذا قسمنا طرفي المعادلة (2)' على 5 ، نحصل على المعادلة المكافئة (1)' فيكون لدينا مثلاً :

$$\left. \begin{array}{l} 4 - = e + s - 8 \\ 4 - = e + s - 8 \end{array} \right\}$$

إن مجموعة حلول الجملة المفروضة هي مجموعة حلول المعادلة :

$$4 - = e + s - 8$$

ونعلم أن مجموعة حلول هذه المعادلة هي مجموعة غير منتهية من الثنائيات المرتبة من  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  . نستنتج أن للجملة المفروضة عددًا غير منتهٍ من الحلول .

مثال 2 :

لنحلّ في  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  الجملة الآتية :

$$\left. \begin{aligned} 3s - 5e &= \frac{1}{5} \\ -2s + \frac{20}{6}e &= \frac{7}{4} \end{aligned} \right\}$$

بعد التحويلات نجد الجملة (أ) ثم الجملة (ب)

$$\left. \begin{aligned} 15s - 25e &= 1 \\ -24s + 40e &= 21 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\xrightarrow{8 \times} \\ &\xrightarrow{5 \times} \end{aligned} \left. \begin{aligned} 120s - 200e &= 8 \\ -120s + 200e &= 105 \end{aligned} \right\} (ب)$$

وبالجمع نجد المعادلة :

$$0s + 0e = 113$$

من أجل أي ثنائية مرتبة من  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  يكون الطرف الأول لهذه المعادلة معدوماً وطرفها الثاني هو 113 . وهذا مستحيل .

نقول إنه لا توجد أي ثنائية مرتبة من  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  تحقق الجملة المفروضة ، أي أن مجموعة حلول هذه الجملة هي المجموعة الخالية .

بصفة عامة :

كل جملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين :

- إما لها حل واحد فقط .
- وإما لها عدد غير منته من الحلول .
- وإما ليس لها حل .

## تمارين

1. حل في ج المعادلات الآتية :

$$(4) \quad 0,8 + س = \frac{س + 3}{4}$$

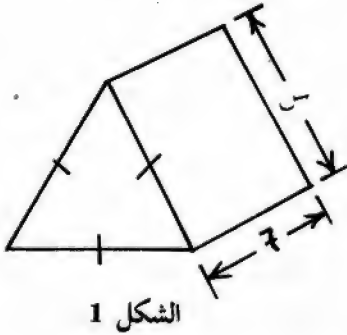
$$(1) \quad س - 2 = 4 + س - 9$$

$$(2) \quad 4 + س = (6 - س) - س$$

$$(3) \quad 24,6 - س = 10,5 + س$$

$$(5) \quad (س - \sqrt{8}) \cdot 3 = (\sqrt{8} + س) - \sqrt{8}$$

$$(6) \quad 3 - = \sqrt{3} (س - 1) - س$$



2. أوجد قيمة س بحيث يكون

محيط المثلث المتقايس الأضلاع  
مُساوياً محيط المستطيل (الشكل 1)

3. حل في ج المعادلات الآتية :

$$(1) \quad 1 - \frac{36 - س}{4} = \frac{س - 12}{2} - \frac{2 - س}{3}$$

$$(2) \quad 0 = \frac{4}{5} + \frac{س - 5}{6} - \frac{1 + س}{3}$$

$$(3) \quad \frac{11 - س}{11} - 7 = س + \frac{س}{5}$$

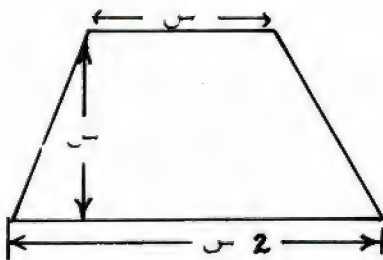
4. حل في ج المعادلات الآتية :

$$(1) \quad 0 = (7 - س) (1 - س)$$

$$(2) \quad 0 = 9 + س + س^2$$

$$(3) \quad 0 = 1 - س^2$$

$$(4) \quad 0 = 4 + س + س^2$$



5. أوجد س بحيث يكون مساحة شبه المنحرف

مساوية 24 سم<sup>2</sup> (الشكل 2).



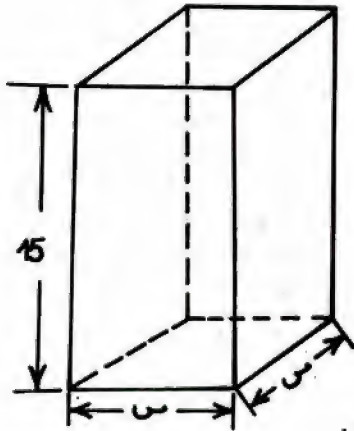
6. حل في ح المعادلات الآتية :

$$(1) \quad 0 = 2س + 4س - 7$$

$$(2) \quad 16 - 2س = (3س - 1)(4 - س)$$

$$(3) \quad 0 = \frac{3}{10} - س - 5 \times \frac{1}{10} - 2س - \frac{7}{10} + س + 3 \times \frac{1}{10} - 2س$$

$$(4) \quad (1 + س)(5 - س) = (7 + س)(5 - س) + (1 - س)(5 - س)$$



الشكل 3

7. أوجد س بحيث يكون

حجم متوازي المستطيلات

مساوياً 135 م<sup>3</sup>. (الشكل 3)

8. ا، ب، س أعداد حقيقية بحيث :

$$(1) \quad 9 + س + 3س^2 = (3 + س)^2$$

$$(2) \quad 1 + س - (4 + 2س) = ب$$

(1) حلل ا إلى جُداء عاملين.

(2) حل في ح كلا من المعادلتين ا = ب ؛ ب = 13 .

9. حل في ح كلا من المعادلات الآتية :

$$(1) \quad 2 + س + 12س - 2س^2 = 49 + س + 14س^2$$

$$(2) \quad 0 = 2(5 - س)9 - 2(7 - س)$$

$$(3) \quad \left( \frac{1}{3} + س + 3س^2 \right) = \left( \frac{1}{5} - س + 4س^2 \right)$$

$$(4) \quad \frac{1}{9} + س - \frac{1}{3}س^2 = \frac{1}{4} + س - 2س^2$$

10. أوجد ثلاثة أعداد طبيعية متتالية مجموعها 45 .

11. ثلاثة أعداد زوجية متتالية يزيد مجموع الثاني والثالث عن الأول بـ 58 . عيّن كلا من

هذه الأعداد .

12. عدد مكوّن من رقمين مجموعهما 11 ؛ إذا بدلنا موضعي الرقمين حصلنا على عدد يزيد عن العدد الأول بـ 63 .

- أوجد العدد الأول .

13. عدد مؤلف من رقمين ، رقم عشراته ضعف رقم آحاده ؛ إذا بدلنا موضعي الرقمين كان الفرق بين العدد الأول والعدد الناتج 27 . أوجد هذا العدد .

14. خزان من البترول مملوء بنسبة  $\frac{4}{5}$  سعته ؛ استهلك منه 1400 م<sup>3</sup> ، فبقي فيه  $\frac{1}{3}$  سعته .

- أوجد سعة هذا الخزان .

15. في سنة 1986 كان عمر أب 47 سنة وعمر ابنه 16 سنة

- في أي سنة يكون عمر الأب ضعف عمر الابن .

16. مربعان طول ضلع أحدهما 5 أمثال طول ضلع الآخر ؛ ومجموع مساحتهما 2106 م<sup>2</sup> .

- أوجد طول ضلع كل من المربعين .

17. عمر رجل 40 سنة وعمر ابنه 9 سنوات . بعد كم سنة يصبح عمر الأب ضعف عمر الابن ؟

18. مجموع أعمار ابن وأمه وجدته هو 90 سنة .

- أوجد عمر كل منهم علماً بأن عمر الجدة ضعف عمر الأم ، وعمر الابن ثلث عمر أمه .

19. حل في ج × ح الجمل الآتية :

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \varepsilon + 2\sqrt{s} \\ 1 &= \varepsilon + 3s \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} 7 &= \varepsilon + 5s \\ 4 &= \varepsilon - s \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} 4 &= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{s}{2} \\ 2 &= \frac{\varepsilon}{2} - \frac{s}{4} \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} 22 &= \varepsilon^2 + s \frac{11}{7} \\ \frac{21}{4} &= \varepsilon^4 - s \frac{3}{8} \end{aligned} \right\} (s)$$

$$\left. \begin{aligned} 16 &= (\varepsilon + s)^3 + (\varepsilon^2 - s)^4 \\ 14 &= (\varepsilon - s)^3 - (\varepsilon^2 + s)^4 \end{aligned} \right\} (f. 21)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{2-\varepsilon}{3} &= \frac{3-s}{2} - \frac{1-s}{4} \\ \frac{\varepsilon^7}{5} &= \frac{6+s^2}{5} + \frac{1+s^3}{8} \end{aligned} \right\} (s)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[5]{v} &= \sqrt[2]{v} \varepsilon - \sqrt[3]{v} s \\ \sqrt[10]{v} &= \varepsilon^2 + \sqrt[6]{v} s - \end{aligned} \right\} (f. 22)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= (\varepsilon - s) \frac{3}{4} + (\varepsilon + s) \frac{2}{3} \\ 1 &= (\varepsilon - s) \frac{2}{3} + (\varepsilon + s) \frac{4}{3} \end{aligned} \right\} (s)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1+s^2}{3} - \frac{\varepsilon-s}{2} \\ 0 &= \frac{3-\varepsilon^2}{2} + \frac{1-s^4}{3} \end{aligned} \right\} (f. 23)$$

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\varepsilon^6}{5} + \frac{s^5}{3} \right) 2 - 15 &= \frac{\varepsilon^3}{5} + \frac{s^5}{3} \\ \left( \varepsilon + \frac{s}{6} \right) 8 - 31 &= \varepsilon + \frac{s^2}{3} \end{aligned} \right\} (s)$$

$$24. \quad \left. \begin{aligned} 2 &= \frac{ع}{3} + \frac{س}{3} \end{aligned} \right\} (أ)$$

$$\left. \begin{aligned} 0,4 س + 0,6 ع &= 2,6 \\ 0,3 س - 1,4 ع &= -0,8 \end{aligned} \right\} (ب)$$

$$0,7 س + 1,3 ع = 37$$

25. إذا كان ثمن كتابين أحدهما للجغرافيا والثاني للتاريخ 24 د.ج وكان ثمن كتابين للجغرافيا يزيد 9 د.ج عن ثمن كتاب التاريخ .  
- فما ثمن كل من الكتابين ؟

26. س وع عددان ، مجموع الأول وثلاثة أمثال الثاني يساوي 53 والفرق بين أربعة أمثال الأول وضعف الثاني يساوي 2 . فما هما العددان ؟

27. أ ، ب متحركان . إذا كانت سرعة أ تزيد عن سرعة ب 2 كيلو متر في الساعة وكانت ثلاثة أمثال سرعة أ تزيد 3 كيلو مترات في الساعة عن ضعف سرعة ب . فما سرعة كل منهما ؟

28. اشترى تلميذ من أحد المكتبات مسطرة وكراساً وعند عودته إلى المنزل سأله أخوه عن ثمن كل منهما ، فقال التلميذ لأخيه : إن ثمن 9 كراسات يساوي ثمن 6 مساطر وإن مجموع ثمن 5 كراسات و 4 مساطر هو 22 د.ج .  
فهل يمكنك معرفة ثمن كل من الكراس والمسطرة ؟

29. كُلف مقاول بإنجاز مشروع خلال أسبوع فوجد أنه لو استخدم 40 عاملاً مختصاً و 22 عاملاً مساعداً لبلغ أجرهم الأسبوعي 6780 د.ج ؛ ولو استخدم 32 عاملاً مختصاً و 25 عاملاً مساعداً لوفّر 690 د.ج .  
فما أجرة كل من العامل المختص والعامل المساعد ؟



## المعادلات عند الخوارزمي

رياضي من القرن الثالث الهجري (توفي 850 للميلاد) .

محمد بن موسى الخوارزمي من بلدة خوارزم ، كانت له مكانة عند الخليفة المأمون وولاه بيت الحكمة وجعله رئيس بعثة إلى بلاد الأفغان للبحث والتنقيب ، كان نابغة في الرياضيات والفلك .

هو أول من أطلق اسم الجبر على العلم المعروف الآن بهذا الاسم ، وأول من حرر الجبر عن الحساب وألف فيه كتاب « الجبر والمقابلة » . ومعني الجبر تعويض الطرح بعملية جمع ، والمقابلة تعني مقابلة المجهول بقيمة معلومة .

وقد صنف الخوارزمي الأعداد المستعملة في الجبر إلى ثلاثة أنواع :  
« الجذر » مثل س ، و « المال » مثل س<sup>2</sup> ، والأعداد المفردة مثل 1 ، 2 ، 3 ،  
أ ، ب ، ....

كما صنف مسائل الحياة اليومية من معاملات تجارية وقسمة التراكات ومسح الأراضي إلى ستة أنواع حيث صاغ كل نوع بمعادلة ، وهذه المعادلات هي :

- (1) « أموال تعدل جذورًا » مثل المعادلة :  $أ س^2 = ب س$  .
- (2) « أموال تعدل أعدادًا » مثل المعادلة :  $أ س^2 = ح$  .
- (3) « جذور تعدل أعدادًا » مثل المعادلة :  $ب س = ح$  .
- (4) « أموال وجذور تعدل أعدادًا » مثل المعادلة :  $أ س^2 + ب س = ح$  .
- (5) « مال وأعداد تعدل جذورًا » مثل المعادلة :  $أ س^2 + ح = ب س$  .
- (6) « جذور وأعداد تعدل أموالًا » مثل المعادلة :  $ب س + ح = أ س^2$  .

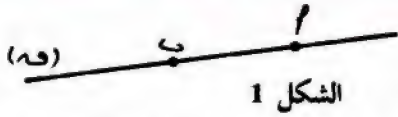
استعمل الخوارزمي الحصر الآتي :  $\frac{1}{7} + 3 > \pi > \frac{62832}{410 \times 2}$



## معادلات مستقيم في المستوى

8

1. تعيين مستقيم في المستوى :



الشكل 1

(1) ا، ب نقطتان من المستوى .

نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد (و) يشمل هاتين النقطتين ، هذا يعني أن النقطتين ا، ب تعيينان المستقيم (و) أي (ا، ب) .

يتعين مستقيم في المستوى بنقطتين مختلفتين من هذا المستوى

2. ش شعاع غير معدوم في المستوى ؛ ا نقطة من هذا المستوى .

(ك) مستقيم من المستوى شعاع توجيهه ش ولا يشمل ا

نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد (و) يشمل ا ويوازي (ك) ، فالمستقيم (و) معين بالنقطة ا والشعاع ش .

• نعلم أنه إذا كانت النقط ا، ب، ه على استقامة واحدة ، أي إذا كانت ه

نقطة من المستقيم المعين بالنقطتين ا، ب فإن الشعاع  $\overrightarrow{اه}$  يوازي الشعاع  $\overrightarrow{اب}$  ، أي  $\overrightarrow{اه} // \overrightarrow{اب}$  .

• ونعلم أنه إذا كانت ا، ب، ه ثلاث نقط من المستوى بحيث :

$\overrightarrow{اه} // \overrightarrow{اب}$  فإن هذه النقط تنتمي إلى المستقيم (ا، ب) .

## نتيجة 1 :

المستقيم (ق) المَعين بالنقطتين أ ، ب هو مجموعة النقط  $\vec{r}$  من المستوي بحيث  $\vec{r} \parallel \vec{AB}$ .

• إذا كانت  $\vec{r}$  نقطة من المستقيم (ق) المَعين بالنقطة أ وشعاع التوجيه  $\vec{s}$  فإن  $\vec{r} \parallel \vec{s}$ .

• وإذا كان  $\vec{s}$  شعاعاً في المستوي و أ ،  $\vec{r}$  نقطتين من المستوي بحيث  $\vec{r} \parallel \vec{s}$  فإن النقطة  $\vec{r}$  تنتمي إلى المستقيم المَعين بالنقطة أ وشعاع التوجيه  $\vec{s}$ .

## نتيجة 2 :

المستقيم (ق) المَعين بالنقطة أ وشعاع توجيه  $\vec{s}$  هو مجموعة النقط  $\vec{r}$  من المستوي بحيث  $\vec{r} \parallel \vec{s}$ .

## 2. معادلات مستقيم في المستوي :

### مثال 1 :

• إيجاد معادلة لمستقيم مَعين بنقطتين :

(م ، و ، ع) معلم للمستوي ، أ (-2 ، 3) ، ب (3 ، 4) نقطتان من المستوي ، (ق) هو المستقيم المَعين بالنقطتين أ ، ب .  
(ق) هو مجموعة النقط  $\vec{r}$  (س ، ع) من المستوي بحيث  $\vec{r} \parallel \vec{AB}$ .

$$\text{لدينا } \vec{r} \parallel \vec{AB} \text{ و } \vec{r} \parallel \vec{AB} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 2+s \\ 3+e \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \parallel \vec{AB} \text{ معناه } 0 = (3+e)5 - (2+s)7$$

$$\text{أي } 0 = 15 - 5e - 14 + 7s$$

$$\text{ومنه } 0 = 1 - 5e + 7s \quad (1)$$

لاحظ أننا حصلنا على معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س ، ع وأن إحداثيي النقطة أ يحققان المعادلة (1)

$$\text{أي أن } 0 = 1 - 15 + 14 = 1 - (3 -) 5 - (2 -) \times 7$$

وأيضا إحداثيا النقطة ب يحققان هذه المعادلة .

$$\text{أي أن } 0 = 1 - 20 - 21 = 1 - (4 \times (5) - (3 \times 7))$$

إليك النقط ح (1 ، 0) ، د (8 ، 11) ، هـ (12 ، 17) ، ك (17 ، 12) ،  $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{3}\right)$

• يمكن أن نتحقق أن النقطتين د ، هـ تنتميان إلى (و) لأن  $\overrightarrow{أو} // \overrightarrow{أب}$  و  $\overrightarrow{أه} // \overrightarrow{أب}$  ، بينما النقطتان ح ، ك لا تنتميان إلى (و) ، لأن  $\overrightarrow{أح}$  لا يوازي  $\overrightarrow{أب}$  وأيضا  $\overrightarrow{أك}$  لا يوازي  $\overrightarrow{أب}$  .

• لاحظ أن إحداثيي كل من النقطتين د ، هـ يحققان المعادلة (1) ، لكن إحداثيي كل من النقطتين ح ، ك لا يحققان المعادلة (1) .

وبصفة عامة :

إحداثيا كل نقطة من المستقيم (و) يحققان المعادلة (1) .

وإحداثيا كل نقطة لا تنتمي إلى (و) لا يحققان المعادلة (1) .

المعادلة (1) تسمى معادلة للمستقيم (و) .

المستقيم (و) المَعَيَّن بالنقطتين أ (2- ، 3-) ، ب (3 ، 4) هو مجموعة النقط هـ (س ، ع) من المستوي بحيث :  $7س - 5ع - 1 = 0$

أ (1 ، 2) ، ب (5 ، 4) نقطتان من المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس (م ، و ، هـ) . عَيِّن معادلة للمستقيم (و) .



## مثال 2 :

• إيجاد معادلة للمستقيم المَعَيَّن بنقطة وشعاع توجيه :

(١٩) مستقيم في المستوى المزود بالمعلم (م ، و ، ع) ، هـ (٥ ، ٢) نقطة

من (١٩) ، ش  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  شعاع توجيه للمستقيم (١٩) .

لنبحث عن معادلة للمستقيم (١٩) المَعَيَّن بالنقطة هـ وشعاع التوجيه ش  $\overleftarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$

- نعلم أن المستقيم (١٩) المَعَيَّن بالنقطة هـ وشعاع التوجيه ش  $\overleftarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$  هو مجموعة النقط

هـ (س ، ع) من المستوى بحيث  $\overleftarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} \parallel \overleftarrow{\begin{pmatrix} 2-s \\ 5-e \end{pmatrix}}$  .

لكن  $\overleftarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} \parallel \overleftarrow{\begin{pmatrix} 2-s \\ 5-e \end{pmatrix}}$  و ش  $\overleftarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$  .

إذن  $\overleftarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}} \parallel \overleftarrow{\begin{pmatrix} 2-s \\ 5-e \end{pmatrix}}$  معناه  $0 = [(5-e)3 - (2-s)4]$

أي  $0 = 15 - 3e + 8 - 4s$

فتكون  $0 = 23 - 3e - 4s$  هي معادلة للمستقيم (١٩) .

المستقيم المَعَيَّن بالنقطة هـ (٥ ، ٢) وشعاع التوجيه ش  $\overleftarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}$  هو مجموعة

النقط هـ (س ، ع) من المستوى بحيث  $0 = 23 - 3e - 4s$

(م ، و ، ع) معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

أوجد معادلة للمستقيم المَعَيَّن بالنقطة أ (٥ ، ١) وشعاع التوجيه ش  $\overleftarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$

بصفة عامة :

لنبرهن أن لكل مستقيم في المستوى المزود بمعلم (م، و، ح) معادلة من الشكل  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  حيث  $\alpha$ ،  $\beta$ ،  $\gamma$  أعداد حقيقية و  $\alpha$ ،  $\beta$  غير معدومين معاً

البرهان :

(و) مستقيم معين مثلاً بنقطة هـ (س<sub>0</sub>، ع<sub>0</sub>) وشعاع توجيه ش<sup>←</sup>  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

نعلم أن (و) هو مجموعة النقط هـ (س، ع) من المستوى بحيث :  $\overrightarrow{هـش} // \overrightarrow{ش}$

$$\text{لدينا } \overrightarrow{هـش} \begin{pmatrix} \text{س} - \text{س}_0 \\ \text{ع} - \text{ع}_0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{هـش} // \overrightarrow{ش} \text{ معناه } 0 = (\text{س} - \text{س}_0) \beta - (\text{ع} - \text{ع}_0) \alpha$$

$$\text{أي } 0 = \text{س} \beta - \text{س}_0 \beta - \text{ع} \alpha + \text{ع}_0 \alpha$$

$$\text{أو } 0 = \text{س} \beta - \text{ع} \alpha - \text{س}_0 \beta + \text{ع}_0 \alpha$$

$$0 = (\text{س} \beta - \text{ع} \alpha) + (\text{ع}_0 \alpha - \text{س}_0 \beta)$$

$$\text{نضع } \beta = \alpha - 1, \gamma = \alpha + \text{س}_0 \beta - \text{ع}_0 \alpha$$

فتصبح مركبتنا شعاع التوجيه ش<sup>←</sup> هما -  $\beta$ ،  $\gamma$  أي ش<sup>←</sup>  $\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$\text{ويكون } \alpha + \beta + \gamma = 0$$

- في هذه المعادلة العددان  $\alpha$ ،  $\beta$  غير معدومين معاً ، لأن الشعاع ش<sup>←</sup> الذي هو شعاع توجيه للمستقيم (و) غير معدوم ، أي مركبتاه غير معدومتين معاً .
- إن المعادلة  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  حيث  $\alpha$ ،  $\beta$  غير معدومين معاً تسمى

معادلة للمستقيم (و) المعين بالنقطة هـ (س<sub>0</sub>، ع<sub>0</sub>) وشعاع التوجيه ش<sup>←</sup>  $\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

كل مستقيم من المستوى المزود بمعلم معادلة من الشكل :  
 $ax + by + c = 0$  حيث  $a, b$  غير معدومين معا .

نقبل ما يلي :

(م، و، ي) معلم للمستوي .  
 كل معادلة من الشكل  $ax + by + c = 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية و  $a, b$  غير معدومين معا هي معادلة لمستقيم في المستوى يوازي الشعاع  $\overrightarrow{\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}}$ .

مثال : المعادلة  $2x - 3y + 5 = 0$  هي معادلة للمستقيم

الذي يوازي الشعاع  $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$ .

حالات خاصة :

(1) إذا كان  $0 = ax + by + c$  فإن المعادلة  $0 = 0$  تصبح :

$ax + by + c = 0$  ومنه  $c = -ax - by$  وهي معادلة لمستقيم يوازي الشعاع

$\overrightarrow{\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}}$  وهذا الشعاع يوازي شعاع الوحدة  $\overrightarrow{u}$ ، وبالتالي فهو يوازي محور الفواصل .

مثال : المعادلة  $3x - 7 = 0$  هي معادلة لمستقيم يوازي محور الفواصل ويشمل

مثلا النقط  $\left(-\frac{7}{3}, 0\right), \left(-\frac{7}{3}, 1\right), \left(-\frac{7}{3}, 5\right)$ .



(2) إذا كان  $0 = 0$  فإن المعادلة  $1 = 0 + 1 + 0 = 0$  تصبح :

$$1 = 0 + 0 = 0 \text{ ومنه } 1 = 0 \text{ وهي معادلة لمستقيم يوازي}$$

الشعاع  $\vec{S} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  أي يوازي شعاع الوحدة  $\vec{e}_1$  وبالتالي يوازي محور

الترتيب .

مثال : المعادلة  $2 = 0 + 0 = 0$  هي معادلة لمستقيم يوازي محور الترتيب ويشمل مثلاً النقط  $(0, 3)$  ،  $(1, 3)$  ،  $(2, 3)$  .

ملاحظة :

- معادلة محور الفواصل هي  $0 = 0$  .
- معادلة محور الترتيب هي  $0 = 0$  .

(3) إذا كان  $0 \neq 1$  ،  $0 \neq 0$  ،  $0 = 0$  فإننا نحصل على المعادلة :

$$0 = 0 + 0 = 0$$

ويمكن أن نكتب هذه المعادلة على الشكل :

$$0 = 0 + 0 = 0$$

لاحظ أن إحداثيي المبدأ يحققان هذه المعادلة ،

$$0 = 0 \times 0 + 0 \times 0$$

فهذه المعادلة هي معادلة للمستقيم الذي يشمل المبدأ ويوازي الشعاع  $\vec{S} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



## ملاحظة 1 :

إذا ضربنا طرفي المعادلة  $1 = س + ب + ع + ح = 0$  بأي عدد حقيقي غير معدوم  $ك$  نحصل على المعادلة المكافئة لها وهي :

$$0 = (ك) + س + (ك)ب + ع + كح = 0$$

هذه المعادلة هي أيضا معادلة لنفس المستقيم .

مثال :

رأيت أن المعادلة  $7س - 5ع - 1 = 0$  هي معادلة للمستقيم (و) المعين بالنقطتين  $1(-2, 3)$  ،  $ب(3, 4)$  .

كل من المعادلات الآتية هي أيضا معادلة للمستقيم (و) .

$$14س - 10ع - 2 = 0$$

$$0 = \frac{1}{5}س + ع + \frac{7}{5}$$

$$-2س - \frac{10}{7}ع - \frac{2}{7} = 0$$

## ملاحظة 2 :

إذا كانت  $1 = س + ب + ع + ح = 0$  معادلة للمستقيم (و) ، وإذا كان

$$مثلا ب \neq 0 \text{ فإن : } \frac{1}{ب}س + ع + \frac{ح}{ب} = 0$$

$$\text{أو } ع = -\frac{1}{ب}س - \frac{ح}{ب}$$

وهي أيضا معادلة للمستقيم (و) الذي شعاع توجيهه  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ - \end{pmatrix}$

لاحظ أن الشعاعين  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  متوازيان ، إذن الشعاع  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (ق) .

• العدد  $\frac{1}{1}$  يسمى معامل التوجيه للمستقيم (ق) .

• إذا كان المعلم (م ، و ، ح) متعامداً ومتجانساً نسمي هذا المعامل ميل المستقيم (ق) .

### 3. إنشاء مستقيم معرف بمعادلة :

(م ، و ، ح) معلم للمستوى .

مثال 1 : لنشيء المستقيم (ق) المعروف بالمعادلة  
 $3س - 2ع + 1 = 0 \dots\dots (1)$

- نعلم أنه لإنشاء مستقيم في المستوي يكفي معرفة نقطتين منه أو معرفة نقطة منه وشعاع توجيه له .

- وبما أن المستقيم (ق) معرف بالمعادلة (1) التي هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين، يوجد عدد غير منته من الثنائيات المرتبة التي تحققها .  
ولتعيين ثنائية مرتبة تحقق المعادلة (1) يكفي إعطاء قيمة لأحد المجهولين فنجد قيمة المجهول الآخر .

• مثلاً إذا كان  $س = 0$  فإن  $0 = 1 + 2ع - 0 \times 3$

ومنه  $2ع = 1$  أي  $ع = \frac{1}{2}$  .

فالنقطة  $ه \left( \frac{1}{2}, 0 \right)$  هي نقطة من (ق) .

• إذا كان  $ع = 1 -$  فإن  $3 س - 2(1 -) = 0$ .

ومنه  $3 س = 3$  أي  $س = 1$

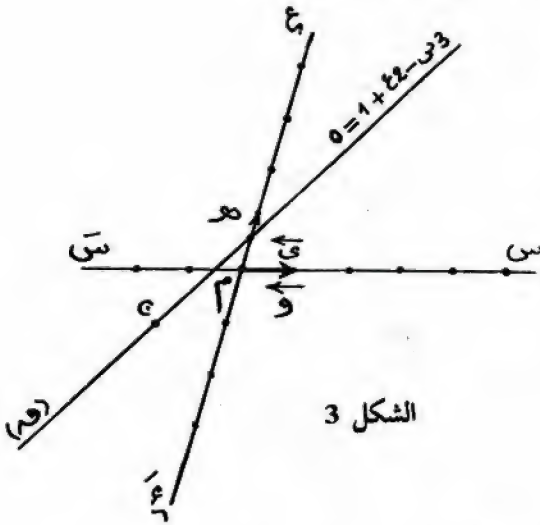
فالنقطة  $و(1, 1)$

هي أيضا نقطة من (١٩).

وبهذا يمكن إنشاء

المستقيم (١٩) المعروف

بالمعادلة (1). (الشكل 3)



الشكل 3

مثال 2 :

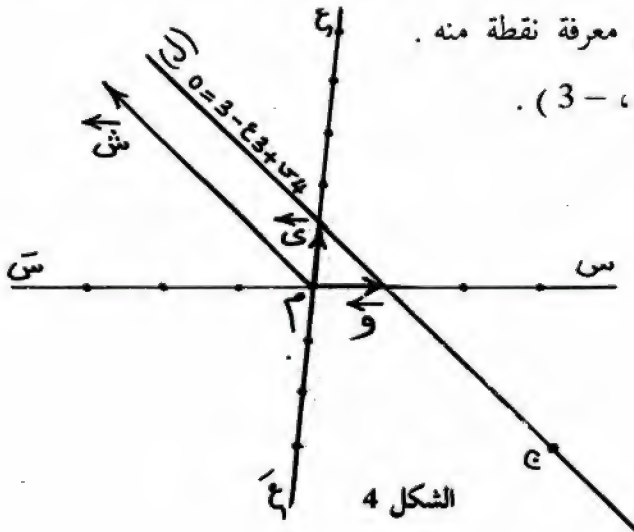
لننشئ المستقيم (٢) المعروف بالمعادلة  $4 س + 3 ع - 3 = 0$ .... (1)

يمكن أن ننشئ (٢) بإيجاد نقطة منه وشعاع توجيه له.

من المعادلة (1) نجد أن الشعاع  $\vec{ش} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  هو شعاع توجيه للمستقيم (٢)،

لإنشاء (٢) يكفي معرفة نقطة منه.

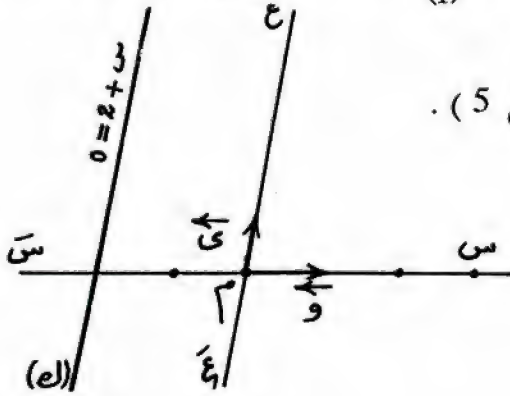
مثلاً النقطة  $و(3, -3)$ .



الشكل 4

### مثال 3 :

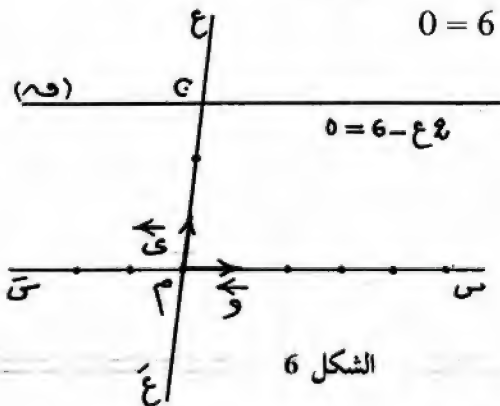
لننشئ المستقيم (ك) المعروف بالمعادلة  $0 = 2 + س$  (1)....  
 لاحظ أن هذه المعادلة هي من الشكل  $0 = 2 + ع$   
 فالمستقيم (ك) يوازي الشعاع  $\vec{ش} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  الذي هو الشعاع  $\vec{ع}$ . ويمكن إنشاء



الشكل 5

### مثال 4 :

- لننشئ المستقيم (و) المعروف بالمعادلة  $0 = 6 - ع$  (1)....  
 لاحظ أن هذه المعادلة هي من الشكل  $0 = 6 - ع$ .  $س + 2 = ع$   
 فالمستقيم (و) يوازي الشعاع  $\vec{ش} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  الذي له نفس منحى الشعاع  $\vec{و}$ .



الشكل 6

المستقيم (و) الذي معادلته  $0 = 6 - ع$   
 يوازي الشعاع  $\vec{و}$  أي  
 يوازي محور الفواصل  
 ويشمل النقطة  
 هـ (3, 0) مثلاً. (الشكل 6)



## مثال 5 :

- لنشئ المستقيم (خ) المعروف بالمعادلة  $2س - 3ع = 0$ .... (1)

لاحظ أن المستقيم (خ) يوازي الشعاع  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

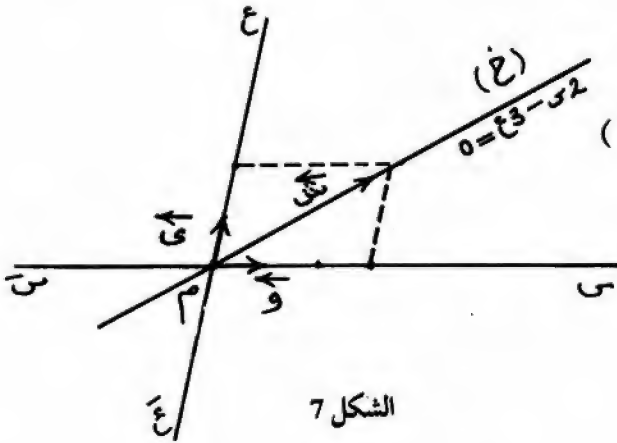
ولإنشاء هذا المستقيم يكفي معرفة نقطة منه .

لاحظ أن النقطة م (0 ، 0) تحقق المعادلة (1) لأن  $0 = 0 \times 2 - 0 \times 3$

فالمستقيم (خ) يشمل

المبدأ م (0 ، 0) ويوازي

الشعاع  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ، (الشكل 7)



الشكل 7

أنشئ في المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس (م ، و ،  $\vec{u}$ )  
المستقيمت المعرفة بالمعادلات الآتية :

$$2 = \frac{4}{5}س - \frac{4}{7}ع \quad ; \quad 0 = \frac{8}{5}س - \frac{4}{7}ع$$

$$\frac{3}{4}س = \frac{2}{5}ع \quad ; \quad \frac{5}{2}س = ع \quad ; \quad 3 = ع$$

## الحل البياني لجملة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

(م، و، ع) معلم للمستوي .

$$1س + 2ع + 3و = 0 \dots (1) \text{ حيث } (1, 0) \neq (0, 0)$$

$$1س + 2ع + 3و = 0 \dots (2) \text{ حيث } (1, 0) \neq (0, 0)$$

نعلم أن حل هذه الجملة هو إيجاد مجموعة الثنائيات المرتبة (س، ع) من  $ع \times ع$  التي تحقق المعادلتين معاً ، وهذا يعني إيجاد مجموعة النقط  $هـ$  (س، ع) التي تنتمي إلى المستقيم (و) المعروف بالمعادلة (1) وإلى المستقيم (ك) المعروف بالمعادلة (2) أي إلى المجموعة  $(و) \cap (ك)$  ، ونعلم أن أي مستقيمين في المستوي هما :

(1) إما متقاطعان في نقطة ، وفي هذه الحالة للجملة حل وحيد

(2) وإما متوازيان تماماً ، وفي هذه الحالة الجملة ليس لها حل .

(3) وإما متطابقان ، وفي هذه الحالة للجملة عدد غير منته من الحلول .

إيجاد مجموعة النقاط المشتركة للمستقيمين يسمى الحل البياني للجملة .

مثال 1 :

$$\left. \begin{aligned} & 1س + 2ع + 3و = 1 \dots (1) \\ & 1س + 2ع + 3و = 4 \dots (2) \end{aligned} \right\} \text{ لنحل بيانياً الجملة}$$

- لننشئ المستقيمين (و) و (ك) المعروفين بالمعادلتين (1) و (2) على الترتيب

بالنسبة إلى المعلم (م، و، ع) .

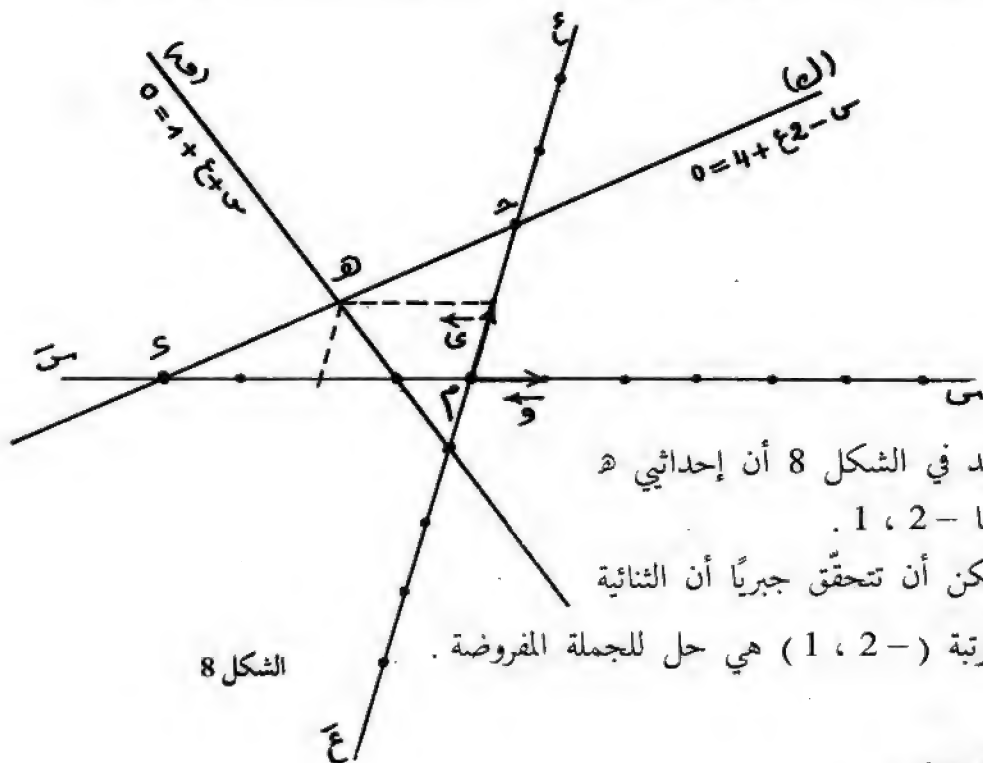
$$\text{إن الشعاع } \overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم (و) .}$$

$$\text{والشعاع } \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم (ك) .}$$

$$\text{الشعاعان } \overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ و } \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \text{ غير متوازيين لأن } 1 \times (1 - 2) \neq 2 \times 1$$

فالمستقيمان متقاطعان في نقطة هـ (س<sub>0</sub>، ع<sub>0</sub>) حيث (س<sub>0</sub>، ع<sub>0</sub>) هو حل الجملة المفروضة .

- المستقيم (و) يشمل النقطتين  $f(1, 0)$  ،  $g(0, 1)$  مثلاً .
- والمستقيم (ك) يشمل النقطتين  $h(2, 0)$  ؛  $z(0, 4)$  مثلاً .



نجد في الشكل 8 أن إحداثي  $h$  هما  $1, 2$  .

يمكن أن نتحقق جبرياً أن الثنائية

المرتبة  $(1, 2)$  هي حل للجملة المفروضة .

الشكل 8

ملاحظة :

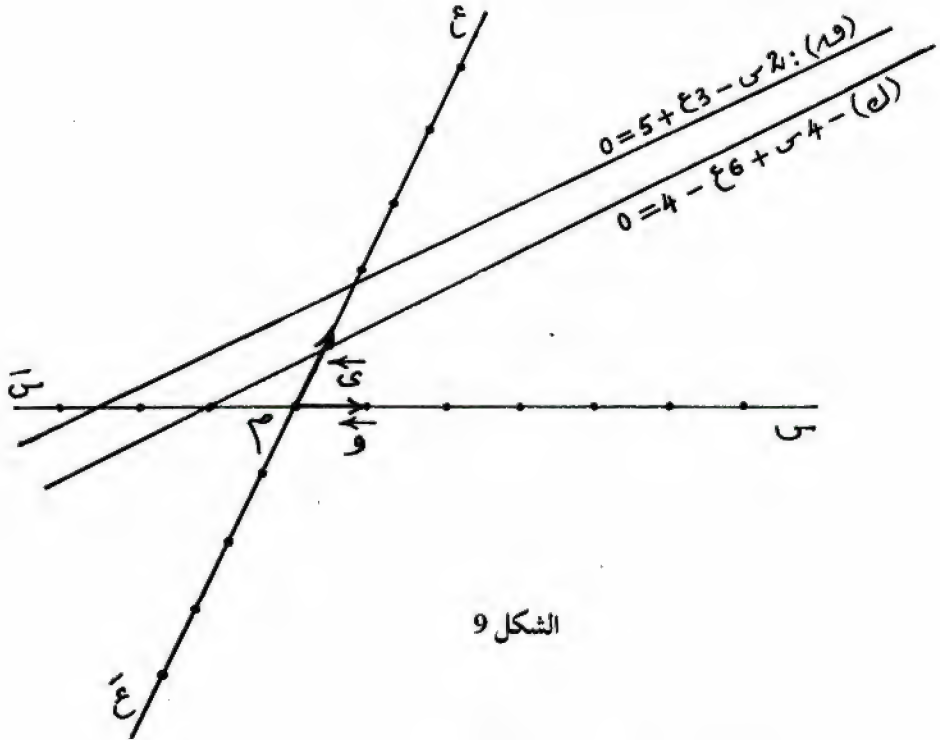
يفضل استعمال الورق المليمترى لإيجاد الحل البياني لجملة بدقة أكثر ، ولإيجاد الحل الدقيق لجملة نستخدم إحدى الطرق الجبرية للحل .

مثال 2 :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots 0 = 5 + 3ع + 2س \\ (2) \dots 0 = 4 - 6ع + 4س \end{array} \right\} \text{إليك الجملة}$$

لننشئ المستقيم (و) المعروف بالمعادلة (1) والذي يشمل مثلاً النقطتين  $f(0, 2, 5)$  ،  $g(5, 5)$  .

والمستقيم (ك) المعروف بالمعادلة (2) والذي يشمل مثلاً النقطتين  $(0, 1)$  و  $(2, 2)$ .



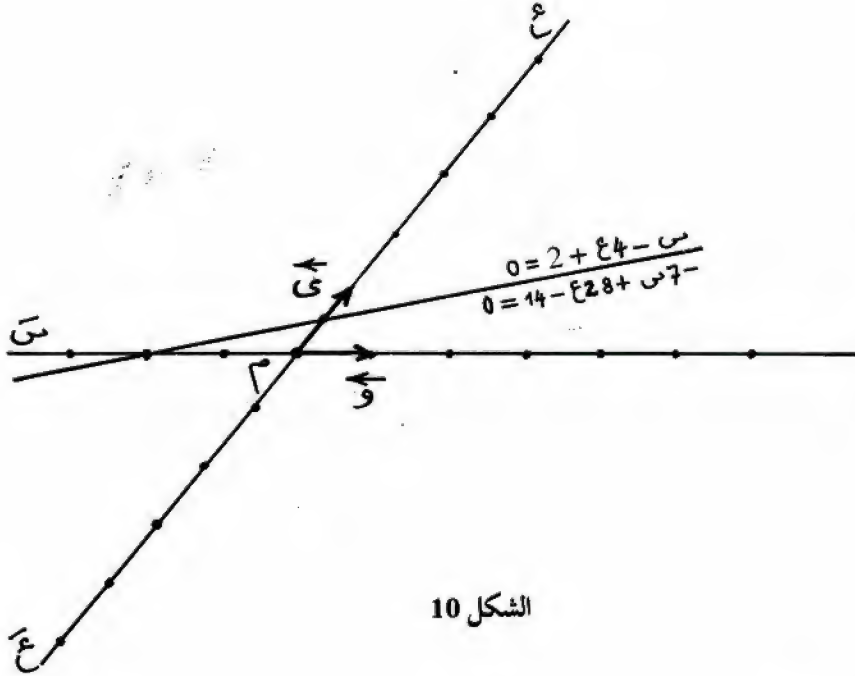
الشكل 9

- لاحظ أن المستقيمين متوازيان تماماً .  
فالجملة المفروضة ليس لها حل ، ويمكن أن نتحقق من ذلك جبرياً .
- لاحظ أيضا أن المستقيم (19) يوازي الشعاع  $\overrightarrow{S_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  . والمستقيم (ك) يوازي الشعاع  $\overrightarrow{S_3} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$  . و  $\overrightarrow{S_2} \parallel \overrightarrow{S_3}$  لأن  $(4-)\times 3 = (6-)\times 2$  وهذا يعني أن  $(19) \parallel (ك)$  .



مثال 3 :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots 0 = 2 + 4ع - س \\ (2) \dots 0 = 14 - 28ع + 7س \end{array} \right\} \text{إليك الجملة}$$



الشكل 10

لاحظ أن المعادلتين (1) و (2) متكافئتان ، فهما تعينان نفس المستقيم ؛ الذي هو مجموعة النقط  $(س، ع)$  حيث  $(س، ع)$  هو حل للجملة المفروضة . نستنتج أن لهذه الجملة عدد غير منته من الحلول .

## مسألة محلولة

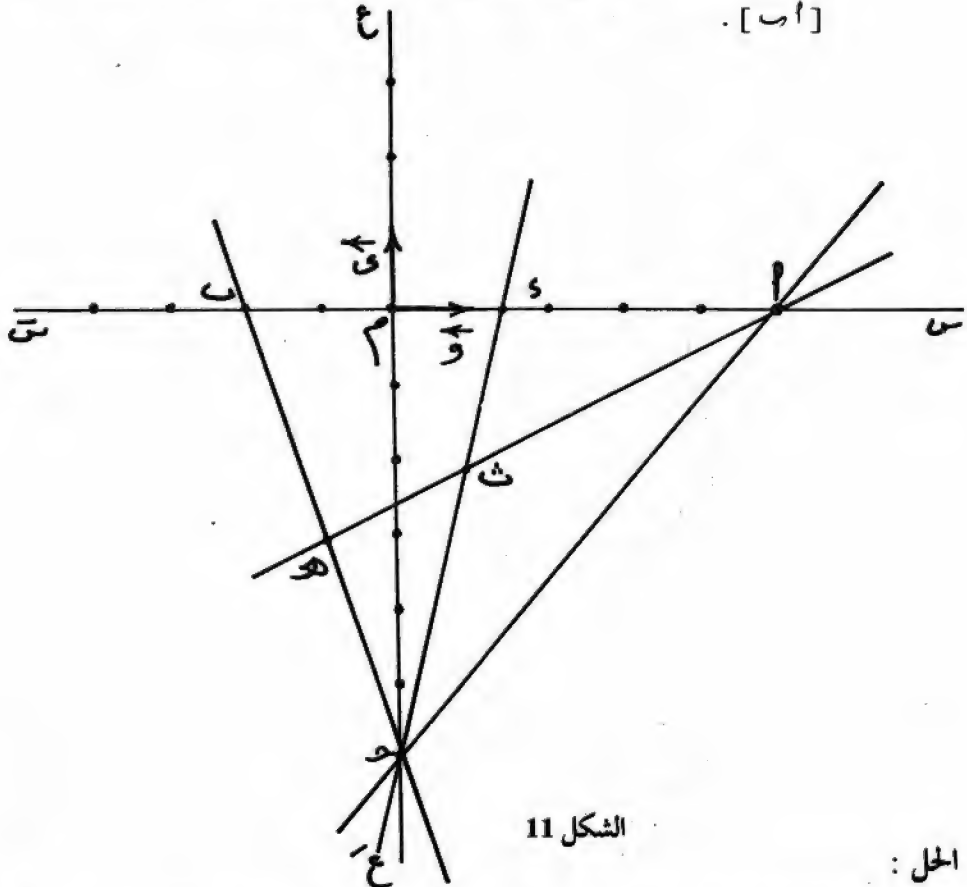
(م، و، ع) معلم للمستوى .

النقط أ (0، 5)، ب (0، 2-)، ح (0، -6) هي رؤوس مثلث .

(1) أوجد إحداثيي النقطة ث مركز ثقل المثلث أ ب ح .

(2) أوجد معادلة حامل كل من الضلع (أ ب) والعمود (ح م) المتعلق بالضلع

(أ ب) .



الحل :

نعلم أن النقطة ث هي نقطة تقاطع متوسطات المثلث ويمكن أن نعين ث بمتوسطين مثلاً

بالمتوسطين (ح و)، (أ هـ) حيث و منتصف [أ ب]، هـ منتصف [ح ب] .

• تعيين إحداثي د :

$$\frac{ع_د + ع_ب}{2} = ع_د ; \frac{س_د + س_ب}{2} = س_د$$

$$س_د = \frac{3}{2} = \frac{2-5}{2} = ع_د = 0 \text{ إذن } د \left( 0, \frac{3}{2} \right)$$

• تعيين إحداثي هـ :

$$\frac{ع_هـ + ع_ب}{2} = ع_هـ ; \frac{س_هـ + س_ب}{2} = س_هـ$$

$$س_هـ = \frac{0+2}{2} = 1 ; ع_هـ = \frac{6-0}{2} = 3 \text{ إذن هـ } (3, 1)$$

• معادلة (أهـ) :

إذا فرضنا ث (س، ع) نقطة من (أهـ) فيكون  $\overrightarrow{أث} // \overrightarrow{أهـ}$

$$\text{و } \overrightarrow{أث} = \begin{pmatrix} 5-س \\ 0-ع \end{pmatrix}, \overrightarrow{أهـ} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-3 \end{pmatrix} \text{ أي } \overrightarrow{أهـ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

فيكون :  $3- = (5-س) - (6-ع) \times 0$

أي  $3- = 6 + (5-س) \times 0$

$3- = (5-س) + 6 \times 0$

أو  $س-5 = 2-ع \dots\dots\dots (1)$

• معادلة (حـد) :

لدينا :  $\overrightarrow{حث} // \overrightarrow{حد}$

لكن  $\overrightarrow{حث} = \begin{pmatrix} 0-س \\ (6-)-ع \end{pmatrix}$  أي  $\overrightarrow{حث} = \begin{pmatrix} -س \\ 6-ع \end{pmatrix}$

$$\cdot \left( \frac{3}{2} \right) \leftarrow \text{أي} \left( \begin{array}{c} 0 - \frac{3}{2} \\ (6-) - 0 \end{array} \right) \leftarrow$$

$$0 = (6 + ع) \frac{3}{2}$$

$$0 = 9 - ع \frac{3}{2}$$

$$\text{أو } 12 \text{ س} - 3 - ع = 18 - 0 \dots\dots (2)$$

ويكفي لإيجاد المجهولين س، ع أن نحلّ الجملة :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - 2 - ع = 5 - 0 \dots\dots (1) \\ 12 \text{ س} - 3 - ع = 18 - 0 \dots\dots (2) \end{array} \right\}$$

من المعادلة (1) لدينا س = 5 + ع .

وبالتعويض في (2) نجد :

$$0 = 18 - ع - 3 - (5 + ع) 12$$

$$0 = 18 - ع - 3 - 60 + ع 24$$

$$0 = 42 + ع 21$$

$$ع = -2$$

$$\text{فيكون س} = 5 + (-2) \times 2$$

$$\text{س} = -4 + 5$$

$$\text{س} = 1$$

نستنتج أن ث (1، -2)

(2) معادلة (أ) :

- لاحظ أن (أ) هو نفسه محور الفواصل إذن معادلة (أ) هي ع = 0

معادلة (ح) :

المستقيم (ح) هو نفسه محور الترتيب إذن معادلة (ح) هي س = 0 .



## تمارين

1. 1. ب نقطتان من المستقيم (و) المعرف بالمعادلة  $7س - ع + 4 = 0$

- احسب ط ، ه بحيث أ (2 ، ه) ؛ ب (ط ، -4) .

2. (و) مستقيم معرف بمعادلة ويشمل النقطتين أ ، ب .

- عين ط ، ه في كل من الحالات الآتية :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \left. \begin{array}{l} 0 = 10 - ع + 3س : (و) \\ \left( \frac{2}{5} , ط \right) : ب \end{array} \right\} \\ \left( 0 , ه \right) : أ \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (2) \quad \left. \begin{array}{l} 0 = 2 + ع - 3س : (و) \\ \left( \frac{3}{5} , ط \right) : ب \end{array} \right\} \\ (0 , ه) : أ \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (3) \quad \left. \begin{array}{l} 3 = \frac{6 - ع + 10س}{2} : (و) \\ \left( \frac{7}{2} , ط \right) : ب \end{array} \right\} \\ (0 , ه) : أ \end{array} \right\}$$

(م ، و ، ع) معلم للمستوي

3. أوجد معادلة المستقيم (أ ب) في كل من الحالات الآتية :

$$\left( \frac{1}{2} , 3 \right) : ب , (5 , 1) : أ$$

$$(1 - , 2) : أ , (1 - , 0) : ب$$

$$(0 , 0) : أ , (3 - , 5 -) : ب$$

$$\left( \frac{1}{2} , 2 - \right) : أ , (1 - , 1) : ب$$

4. ارسم المستقيم (ق) الذي يشمل النقطة هـ ويوازي الشعاع ش في كل من الحالات الآتية :

$$(1) \text{ هـ } (3, 1), \text{ ش } \overrightarrow{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$(2) \text{ هـ } (4, -1), \text{ ش } \overrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$$(3) \text{ هـ } (-1, 5), \text{ ش } \overrightarrow{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$(4) \text{ هـ } 3, \frac{1}{2}, \text{ ش } \overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

5. (ق) مستقيم معادلته  $3س - 5ع + 1 = 0$ .

(1) أوجد مركبتي شعاع توجيه للمستقيم (ق) ؟

(2) ما هي - من بين النقط الآتية - النقط التي تنتمي إلى (ق) ؟

$$A(2, 1) ; B\left(-\frac{4}{5}, 1\right) ; C\left(1, \frac{1}{2}\right) ; D\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

6. (ق)، (ك)، (ل) مستقيمت معادلاتها على الترتيب :

$$3س - 4ع + 3 = 0, \quad 3س + \frac{2}{3}ع - 7 = 0, \quad \frac{1}{5}س + \frac{ع}{2} - \frac{3}{5} = 0$$

(1) عيّن شعاع توجيه لكل من هذه المستقيمت ؟

(2) انشئ المستقيمت (ق)، (ك)، (ل).

(م، و، ح) معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

7. أ (5، 0)، ب (1، 2)، ج (-3، 2) هي رؤوس مثلث.

- أوجد معادلة الحامل كل ضلع من المثلث أ ب ج.

8. أ (0 ، 6) ، ب (0 ، 12) ، ج (0 ، -6) ثلاث نقط من المستوي .

(1) بين أن س - ع - 6 = 0 هي معادلة للمستقيم (أ) .

وأن س - 2ع - 12 = 0 هي معادلة للمستقيم (ب) .

(2) (ل) مستقيم معادلته س + ع = 0 .

بين أن (ل) يقطع (أ) في النقطة د (3 ، -3) ويقطع (ب) في النقطة

هـ (4 ، -4) .

(3) احسب إحداثيات النقط ف ، و ، ك منتصفات [م ج] ، [أ ج] ، [ب د] على الترتيب .

9. (ك) ، (ل) ، (ف) ، (و) مستقيمت من المستوي .

معادلاتها على الترتيب هي :

$$-2 + ع = 0 ، 5س + 2ع - \frac{43}{2} = 0 ، 7س - \frac{7}{2} = 0 ، 2س - 5ع = 0 .$$

(1) بين أن م  $\Rightarrow$  (و) .

(2) عيّن شعاع توجيه لكل من : (ك) ، (ل) ، (ف) ، (و) ؟

(3) بين أن للمستقيمت (ك) ، (ل) ، (ف) نقطة مشتركة .

(4) ارسم المستقيمت الأربعة (ك) ، (ل) ، (ف) ، (و) .

(م ، و ، ح) معلم للمستوي .

10. (و) ، (ك) مستقيمتان معادلتهما على الترتيب هما :

$$3س - 2ع + 2 = 0 ، 3س - \frac{3}{4} + 2 - \frac{ع}{2} = 0$$

(1) عيّن شعاع توجيه لكل من المستقيمتين (و) ، (ك) .

(2) بين أن (و) ، (ك) متوازيان تمامًا .

(3) ارسم (و) و (ك) .

11. (ق) مستقيم معادلته  $0 = 10 + 5ع + 2س$ .

أ، ب نقطتا تقاطع (ق) مع (س س')، (ع ع') على الترتيب.

- (1) احسب إحداثي التقاطع أ، ب.
- (2) أوجد معادلة للمستقيم (ك) الموازي للمستقيم (ع ع') والذي يشمل أ.
- (3) أوجد معادلة للمستقيم (ل) الموازي لـ (س س') والذي يشمل ب.
- (4) إذا كان (ك)  $\cap$  (ل) = {ح}. أوجد إحداثي النقطة ح.

12. أ (5، 0)، ب (1، 2)، ح (-3، -2) نقط من المستوي.

(1) احسب مركبتي شعاع توجيه كل من  $\overrightarrow{AB}$ ،  $\overrightarrow{AC}$ ، ثم بين أن النقط أ، ب، ح تعين مثلثاً.

(2) أ، ب، ح منتصفات [ب ح]، [أ ح]، [أ ب] على الترتيب. احسب إحداثي كل من أ'، ب'، ح'.

(3) احسب مركبتي كل من  $\overrightarrow{A'A}$ ،  $\overrightarrow{B'B}$ ،  $\overrightarrow{C'C}$ .

(4) عيّن معادلة لحامل كل من متوسطات المثلث أ ب ح.

(5) بين أن ث (0، 1) هي مركز ثقل المثلث أ ب ح، واستنتج أن  $\overrightarrow{ثأ} + \overrightarrow{ثب} + \overrightarrow{ثح} = 0$ .

13. (1) حل في  $ع \times ح$  كلاً من الجملتين الآتيتين :

$$\left. \begin{aligned} 3س - 9ع &= 6 \\ 6س + 3ع &= 9 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2س - 6ع + 8 &= 0 \\ 3س - 5ع &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(2) (م، و، ح) معلم للمستوي. حل بيانياً الجملتين السابقتين.

14. (م، و، ح) معلم للمستوي.

(ق، ك) مستقيمان معادلتهما :  $ع = 6 + س$ ،  $ع = 2 + س + 3$ .



- (1) ارسم (و) ، (ك) .
- (2) عَيِّن بيانياً إحداثيي نقطة تقاطع  $\overleftrightarrow{هـ}$  للمستقيمين (و) ، (ك) .
- (3) تحقق حسابياً

15. (و) ، (ك) ، (ل) مستقيمتان من المستوي معادلاتها على الترتيب :

$$\begin{aligned} \text{ع} = \text{س} + 4, \text{ع} = \frac{2}{3}\text{س} - 1, \text{ع} = -4\text{س} + 9. \end{aligned}$$

- (1) ارسم (و) ، (ك) ، (ل) .
- (2) نعتبر المستقيمتان الثلاثة هي حوامل أضلاع مثلث . احسب إحداثيات رؤوس هذا المثلث .

16. (م ، و ، ح) معلم متعامد ومتجانس .

- أ (3 ، 0) ، ب (3 ، -2) ، ح (-1 ، -2) نقط من المستوي .
- (1) بَيِّن أن النقط أ ، ب ، ح ليست على استقامة واحدة .
- (2) أوجد معادلة حامل كل ضلع من أضلاع المثلث أ ب ح .
- (3) بَيِّن أن النقطتين د (-5 ، -4) و هـ (7 ، 2) تنتميان إلى (أ) .
- (4) هـ ، هـ' منتصفا الضلعين [أ ب] ، [ب ح] على الترتيب .
- أ) أوجد معادلة المستقيم (هـ هـ') .
- ب) بَيِّن أن (هـ هـ') // (أ ح) .

17. أ ، ب ، ح ، ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة من المستوي المزود بالمعلم (أ ، أ' ، أ'') .

- (1) عَيِّن إحداثيي كل من النقاط أ ، ب ، ح بالنسبة إلى المعلم (أ ، أ' ، أ'') .
- (2) اكتب معادلة لكل متوسط في المثلث أ ب ح .
- (3) أوجد إحداثيي مركز ثقل المثلث أ ب ح .
- (4) عَيِّن إحداثيي كل من النقطتين د ، هـ بحيث يكون كل من الرباعيين أ ب د ح ، أ ب هـ متوازي أضلاع .

## الأعداد المتناسبة

## 1. أمثلة وتعريف :

مثال 1 : في الجدول الآتي سجّلت نتائج متحرك من نقطة ب إلى نقطة ح ، حيث السطر الأول يمثل المسافات المقطوعة (بالكيلومتر) في أزمنة مقدرة (بالساعة) مسجلة في السطر الثاني .

80	60	45	20	5	المسافة (كم)
16	12	9	4	1	الزمن (سا)

لاحظ أن :  $5 = \frac{5}{1}$  و  $5 = \frac{20}{4}$  ،  $5 = \frac{45}{9}$  ،  $5 = \frac{60}{12}$  ،  $5 = \frac{80}{16}$  .

نستنتج أن  $\frac{80}{16} = \frac{60}{12} = \frac{45}{9} = \frac{20}{4} = \frac{5}{1}$  .

- نقول إن الأعداد 5 ، 20 ، 45 ، 60 ، 80 متناسبة على الترتيب مع الأعداد 1 ، 4 ، 9 ، 12 ، 16 .

- إن النسبة  $\frac{ف}{ز}$  ثابتة وتسمى سرعة المتحرك . لدينا في هذا المثال  $5 = \frac{ف}{ز}$  .  
أي أن سرعة المتحرك في هذا المثال تساوي 5 كم / سا .

مثال 2 : نابض مثبت ، نعلق في طرفه الحركة ع ( بالგრამ ) ونعین في كل مرة الإستطالة س ( بالسنتيمتر ) ؛ ونسجل النتائج في الجدول الآتي :

25	20	15	5	الكتلة ( غ )
10	8	6	2	الاستطالة ( سم )

لاحظ أن :  $2,5 = \frac{25}{10}$  ،  $2,5 = \frac{20}{8}$  ،  $2,5 = \frac{15}{6}$  ،  $2,5 = \frac{5}{2}$

إن الأعداد 5 ، 15 ، 20 ، 25 متناسبة على الترتيب مع الأعداد 2 ، 6 ، 8 ، 10 .

أي  $\frac{25}{10} = \frac{20}{8} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

تعريف :

الأعداد الحقيقية غير المعدومة  $ع_1$  ،  $ع_2$  ،  $ع_3$  ،  $ع_4$  متناسبة مع الأعداد الحقيقية غير المعدومة  $س_1$  ،  $س_2$  ،  $س_3$  ،  $س_4$  على الترتيب معناه

$$\frac{ع_1}{س_1} = \frac{ع_2}{س_2} = \frac{ع_3}{س_3} = \frac{ع_4}{س_4}$$

إن القيمة المشتركة لهذه النسب تسمى معامل التناسب .

- في المثال 1 معامل التناسب يساوي 5 .
- وفي المثال 2 معامل التناسب يساوي 2,5 .



**تعريف :** إذا كان العددان غير المعدومين  $ع_1$  ،  $ع_2$  متناسبين مع العددين غير المعدومين  $س_1$  ،  $س_2$  على الترتيب

$$\text{فإن المساواة } \frac{ع_1}{س_1} = \frac{ع_2}{س_2} \text{ تسمى تناسبًا.}$$

ونقول أيضًا إن الأعداد  $ع_1$  ،  $س_1$  ،  $ع_2$  ،  $س_2$  المعطاة بهذا الترتيب تشكل تناسبًا.

•  $ع_1$  ،  $س_1$  ،  $ع_2$  هما طرفا التناسب .

•  $س_1$  ،  $ع_2$  هما وسطا التناسب .

**خواص التناسب :**

1 ، 2 ، 3 ، 4 أعداد حقيقية غير معدومة .

**الخاصة 1 :**

رأيت في درس الأعداد الحقيقية أن :

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ يعني أن } ا = ب \cdot \frac{ج}{د}$$

نستنتج من ذلك :

**جُداء طرفي تناسب يساوي جُداء وسطيه .**

**الخاصة 2 :**

• لنبرهن على الخاصة :

إذا شكلت الأعداد الحقيقية 1 ، 2 ، 3 ، 4 المعطاة بهذا الترتيب تناسبا أي

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ ، فإن الأعداد } 1 ، 2 ، 3 ، 4 \text{ تشكل تناسبا آخر أي } \frac{ا}{ج} = \frac{ب}{د} .$$



البرهان :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  يعني أن  $a = \frac{b \cdot c}{d}$  أي  $a = \frac{b \cdot c}{d}$  وهذا يعني أن  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .  
فالأعداد  $a, b, c, d$  بهذا الترتيب تشكل تناسباً .

• يمكنك أن تبرهن بنفس الطريقة على الخاصيتين الآتيتين :

الخاصة 3 :

إذا شكلت الأعداد الحقيقية  $a, b, c, d$  و المعطاة بهذا الترتيب تناسباً أي  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فإن الأعداد  $a, b, d, c$  تشكل تناسباً آخر أي  $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$ .

الخاصة 4 :

إذا شكلت الأعداد الحقيقية  $a, b, c, d$  و المعطاة بهذا الترتيب تناسباً أي  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فإن الأعداد  $a, d, b, c$  تشكل تناسباً آخر أي  $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ .

خلاصة :

إذا كان لدينا تناسب فإننا نحصل على تناسب آخر :

- إما بتبديل موضعي وسطي
- وإما بتبديل موضعي طرفي
- وإما بتبديل موضعي وسطي وموضعي طرفي في آن واحد .

حالة خاصة :

الوسط المتناسب لعددين حقيقيين

$$\text{إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ وكان } b = c = s \text{ فإن } s = \sqrt{ad}$$

العدد  $s$  يسمى وسطاً متناسباً للعددين  $a$  ،  $d$  .

مثال : العدد  $\sqrt{6 \times 2}$  هو وسط متناسب للعددين 3 ، 8 .

$$\text{لأن } 8 \times 3 = 6 \times 4 = \sqrt{6 \times 2} \times \sqrt{6 \times 2}$$

$$\text{أي } \frac{\sqrt{6 \times 2}}{8} = \frac{3}{\sqrt{6 \times 2}}$$

العدد  $(\sqrt{6 \times 2} -)$  هو أيضاً وسط متناسب للعددين 3 ، 8 .

$$\text{لأن } 8 \times 3 = 6 \times 4 = (\sqrt{6 \times 2} -) \times (\sqrt{6 \times 2} -)$$

$$\text{أي } \frac{\sqrt{6 \times 2} -}{8} = \frac{3}{\sqrt{6 \times 2} -}$$

(1) عيّن وسطاً متناسباً للعددين 2 ، 18 .

(2) عيّن وسطاً متناسباً للعددين  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{15}{12}$  .

(3) هل يوجد وسط متناسب للعددين -25 ، 4 ؟

## الخاصة 5 :

إذا كانت ا ، ب ، ح ، د ، هـ ، ز ، حـ ، أ أعداد حقيقية غير معدومة

و  $\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{د} = \frac{د}{هـ} = \frac{هـ}{ز} = \frac{ز}{حـ} = \frac{حـ}{أ}$  ، وكانت س ، ع ، ص أعداداً حقيقية بحيث:

س ا + ع ب + ص ح ≠ 0 وس ا + ع ب + ص ح ≠ 0 فإن :

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{د} = \frac{د}{هـ} = \frac{هـ}{ز} = \frac{ز}{حـ} = \frac{حـ}{أ} = \frac{س ا + ع ب + ص ح}{س ا + ع ب + ص ح}$$

البرهان :

$$\text{نضع } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{د} = \frac{د}{هـ} = \frac{هـ}{ز} = \frac{ز}{حـ} = \frac{حـ}{أ} = ك \dots\dots (1)$$

فيكون ا = ك ب ، ب = ك ح ، ح = ك د ، د = ك هـ ، هـ = ك ز ، ز = ك حـ ، حـ = ك أ

ومنه س ا = س (ك ب) ، ع ب = ع (ك ح) ، ص ح = ص (ك د) ،

أي س ا = ك (س ب) ، ع ب = ك (ع ح) ، ص ح = ك (ص د) .

نستنتج أن س ا + ع ب + ص ح = ك (س ب + ع ح + ص د) .

أي س ا + ع ب + ص ح = ك (س ب + ع ح + ص د) .

وبما أن س ا + ع ب + ص ح ≠ 0 .

$$\text{فإن } ك = \frac{س ا + ع ب + ص ح}{س ا + ع ب + ص ح} \dots\dots (2)$$

نستنتج من (1) و (2) أن :

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ب}{ح} = \frac{ح}{د} = \frac{د}{هـ} = \frac{هـ}{ز} = \frac{ز}{حـ} = \frac{حـ}{أ} = \frac{س ا + ع ب + ص ح}{س ا + ع ب + ص ح}$$

### حالات خاصة :

• إذا كان  $س = ع = ص = 1$  و  $ا' + ب' + ح' \neq 0$  فإن :

$$\frac{ا + ب + ح}{ا' + ب' + ح'} = \frac{ا}{ا'} = \frac{ب}{ب'} = \frac{ح}{ح'}$$

• إذا كان  $س = ع = 1$  و  $ص = 0$  و  $ا' + ب' \neq 0$  فإن :

$$\frac{ا + ب}{ا' + ب'} = \frac{ا}{ا'} = \frac{ب}{ب'}$$

• إذا كان  $س = 1$  و  $ع = 1 - ص$  و  $ص = 0$  و  $ا' - ب' \neq 0$  فإن :

$$\frac{ا - ب}{ا' - ب'} = \frac{ا}{ا'} = \frac{ب}{ب'}$$

مثال 1 :  $س$  ،  $ع$  عددان حقيقيان حيث  $\frac{س}{ع} = \frac{2}{3}$  و  $س + ع = 15$  .

لنحسب  $س$  ،  $ع$  .

$$\frac{س}{ع} = \frac{2}{3} \text{ يعني } \frac{س}{2} = \frac{ع}{3}$$

$$3 = \frac{15}{5} = \frac{س + ع}{3 + 2} = \frac{ع}{3} = \frac{س}{2}$$

$$3 = \frac{س}{2} \text{ معناه } س = 2 \times 3 = 6$$

$$3 = \frac{ع}{3} \text{ معناه } ع = 3 \times 3 = 9$$



## مثال 2 :

س ، ع عددان حقيقيان حيث  $\frac{7}{5} = \frac{س}{ع}$  و  $س - ع = 12$   
 - لنحسب س ، ع .

$$\frac{7}{5} = \frac{س}{ع} \text{ معناه } \frac{س}{7} = \frac{ع}{5}$$

$$. 6 = \frac{12}{2} = \frac{س - ع}{5 - 7} = \frac{ع}{5} = \frac{س}{7}$$

$$. 42 = 6 \times 7 = س \text{ معناه } 6 = \frac{س}{7}$$

$$. 30 = 6 \times 5 = ع \text{ معناه } 6 = \frac{ع}{5}$$

## التطبيق الخطي

تذكر ما يلي :

التطبيق تا من مجموعة و إلى مجموعة ل هو علاقة من و إلى ل ترفق كل عنصر

س من و بعنصر وحيد ع من ل .

نكتب : تا : و ← ل

س ← ع

نقول إن ع هي صورة س بواسطة التطبيق تا ،

ونكتب ع = تا (س) .

## 1. التطبيق الخطي :

$f$  عدد حقيقي .  
 التطبيق  $f$  :  $E \rightarrow E$   
 $s \mapsto f(s)$   
 يسمى تطبيقاً خطياً معامله  $f$

لدينا  $f(s) = s$

إذا وضعنا  $E = (s)$  فيكون  $f(s) = s$ .

أمثلة :

(1) كل من التطبيقات الآتية : من  $E$  إلى  $E$ .

تا :  $s \mapsto 2s$  ؛ حا :  $s \mapsto \sqrt{2}s$  ؛ ها :  $s \mapsto \frac{3}{5}s$ .

هو تطبيق خطي

(2) التطبيق  $f$  الذي يرفق كل عدد حقيقي  $s$  بالعدد  $0$  أي  $f(s) = 0$

يسمى التطبيق الخطي المزدوم .

(3) التطبيق  $f$  الذي يرفق كل عدد حقيقي  $s$  بالعدد  $-4$  أي  $f(s) = -4$

هو تطبيق ثابت ، لكنه ليس تطبيقاً خطياً .

## 2. التطبيق الخطي والتناسب :

نا تطبيق خطي معامله  $f$

إذا أعطينا للمتغير  $s$  القيم  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  فنحصل على

الصور :  $f(s_1) = s_1, f(s_2) = s_2, f(s_3) = s_3, f(s_4) = s_4, f(s_5) = s_5$ .

وإذا كانت القيم  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  كلها غير معدومة يكون :

$$1 = \frac{s_1}{s_1} = \frac{s_2}{s_2} = \frac{s_3}{s_3} = \frac{s_4}{s_4} = \frac{s_5}{s_5}$$

نستنتج أن الأعداد  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  متناسبة على الترتيب مع الأعداد غير المعدومة  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$ . وأن معامل التناسب هو معامل التطبيق الخطي  $\tau$ .

بصفة عامة :

إذا كانت الأعداد الحقيقية غير المعدومة  $s_1, s_2, s_3, \dots$  متناسبة مع الأعداد الحقيقية غير المعدومة  $s_1, s_2, s_3, \dots$  فهذا يعني أنه :

يوجد عدد حقيقي $\tau$ بحيث :	أو	يوجد تطبيق خطي $\tau$ :
$s_1 = \tau s_1$		$s_1 \leftarrow \tau$
$s_2 = \tau s_2$		$s_2 \leftarrow \tau$
$s_3 = \tau s_3$		$s_3 \leftarrow \tau$
$\vdots$		$\vdots$

مثال :  $\tau$  تطبيق خطي معامله 2 .

أي :  $\tau : s \leftarrow 2s$

$s \leftarrow 2s$

احسب :

(1)  $\tau(3\sqrt{2}) + \tau(2\sqrt{2})$  و  $\tau(2\sqrt{2} + 3\sqrt{2})$

(2)  $\tau(5\sqrt{7})$  و  $\tau(7\sqrt{5})$  .

لاحظ أن :

$$(1) \quad \text{تا } (\sqrt{2}) + \text{تا } (\sqrt{3}) = \text{تا } (\sqrt{2} + \sqrt{3}) .$$

$$(2) \quad \text{تا } (\sqrt{5} \cdot 7) = 7 \cdot \text{تا } (\sqrt{5}) .$$

لنبرهن على النظرية الآتية :

تا تطبيق خطي من ج إلى ج معاملة أ.

(1) مهما يكن العددان الحقيقيان  $s_1$  ،  $s_2$  فإن

$$\text{تا } (s_1 + s_2) = \text{تا } (s_1) + \text{تا } (s_2) .$$

(2) مهما يكن العدد الحقيقي  $s$  ومهما يكن العدد  $k$  فإن :

$$\text{تا } (ks) = k \cdot \text{تا } (s) .$$

البرهان :

تا : ج ← ج

$$s \leftarrow f(s) .$$

(1) لدينا تا  $(s_1) = f(s_1)$  و تا  $(s_2) = f(s_2)$  .

$$\text{و تا } (s_1 + s_2) = f(s_1 + s_2) = f(s_1) + f(s_2) = \text{تا } (s_1) + \text{تا } (s_2) .$$

فيكون  $\boxed{\text{تا } (s_1 + s_2) = \text{تا } (s_1) + \text{تا } (s_2)} .$

(2) تا  $(ks) = f(ks) = (f(k)) \cdot s = k \cdot \text{تا } (s)$

أي  $\boxed{\text{تا } (ks) = k \cdot \text{تا } (s)} .$



تا تطبيق خطي من  $C$  إلى  $C$  . برهن أنه يمكن العددين الحقيقيين  $s_1, s_2$  ،  
ومهما يكن العددين الحقيقيين  $l, k$  فإن :

$$\begin{aligned} & \text{تا } (k s_1 + l s_2) = k \text{ تا } (s_1) + l \text{ تا } (s_2) . \\ & \text{استنتج أن تا } (s_1 - s_2) = \text{تا } (s_1) - \text{تا } (s_2) . \end{aligned}$$

ملاحظة :

يمكن البرهان على خواص التناسب باستعمال خواص التطبيق الخطي .

#### 4. التمثيل البياني لتطبيق خطي :

مثال :

تا تطبيق خطي معرف كما يلي : تا  $(s) = 2s$  .

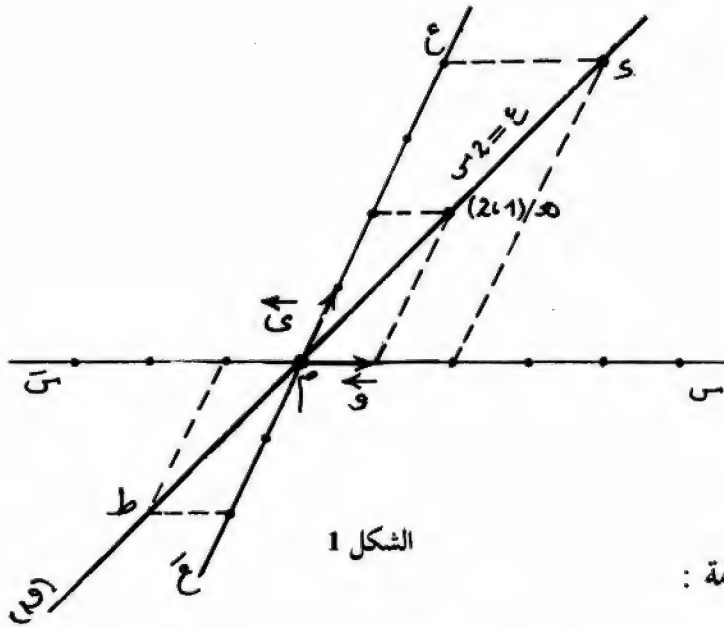
- لنعين في مستو مزود بمعلم  $(m, w, \vec{u})$  مجموعة النقاط  $\vec{r}(s, e)$   
حيث  $e = 2s$  .

- تعلم أن المعادلة  $e = 2s$  أي  $e - 2s = 0$   
تعين في المستوي مستقيماً  $(e)$  يشمل المبدأ  $m(0, 0)$  ويوازي

$$\vec{u}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

فالتطبيق الخطي المعروف كما يلي : تا  $(s) = 2s$

يمثل بيانياً بمستقيم معادلته  $e = 2s$  (الشكل 1)



بصفة عامة :

(م ، و ، ع) معلم المستوي  
التطبيق الخطي نا من ح إلى ع بحيث نا (س) = ا س .  
يُمثل بيانياً بمستقيم يشمل المبدأ م (0 ، 0) وإحدى معادلته ع = ا س .

ملاحظة :

- في (الشكل 1) المستقيم (و) يشمل النقط هـ (2 ، 1) ، ط (1- ، 2-) ، س (2 ، 4) ، إن تراتيب هذه النقط 2- ، 2 ، 4 متناسبة مع فواصلها 1- ، 1 و 2 معامل التناسب هو 2 .

$$أي \quad 2 = \frac{4}{2} = \frac{2-}{1-} = \frac{2}{1}$$

وأيضاً إن فواصل هذه النقط 1 ، - 1 ، 2 متناسبة على التوالي مع الترتيب

2 ، - 2 ، 4 ومعامل التناسب هو  $\frac{1}{2}$ .

$$\text{أي } \frac{2}{4} = \frac{1-1}{2-2} = \frac{1}{2}$$

بصفة عامة :

المستقيم الذي معادلته  $x = f$  س هو مجموعة النقط من المستوى التي ترتبها متناسبة مع فواصلها ومعامل هذا التناسب هو  $f$ .

5. مقارنة صورتي عددين حقيقيين بتطبيق خطي :

مثال 1 :

تا هو التطبيق الخطي المعلوم من  $x$  إلى  $y$ .

لاحظ أنه يمكن العدان الحقيقيان  $s_1$  ،  $s_2$  فإن

$0 = (s_1)$  و  $0 = (s_2)$  ومنه  $0 = (s_1)$  تا  $0 = (s_2)$  تا

نقول إن التطبيق الخطي المعلوم ثابت .

مثال 2 :

تا تطبيق خطي من  $\mathbb{C}$  إلى  $\mathbb{C}$  بحيث  $\tau(s) = \frac{3}{2}s$ .

لاحظ الجدول الآتي :

س	$\frac{3}{2}-$	1 -	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3,5
تا (س)	2,25 -	1,5 -	0	0,75	1,5	3	5,25

إن قيم المتغير س في هذا الجدول مرتبة ترتيباً تصاعدياً وقيم تا (س) أيضاً مرتبة ترتيباً تصاعدياً أي أن صور قيم س بواسطة تا مرتبة بنفس ترتيب قيم س . وبصفة عامة إذا كانت س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> قيمتين للمتغير س بحيث س<sub>1</sub> > س<sub>2</sub> فإن :

$$\frac{3}{2}s_1 > \frac{3}{2}s_2 \text{ أي } \tau(s_1) > \tau(s_2) ,$$

نقول إن التطبيق تا متزايد .

• يمكن أن نبرهن أن كل تطبيق خطي من  $\mathbb{C}$  إلى  $\mathbb{C}$  معاملته موجب هو تطبيق متزايد .

مثال 3 :

ها تطبيق خطي من  $\mathbb{C}$  إلى  $\mathbb{C}$  بحيث  $\tau(s) = -4s$ .

لاحظ الجدول الآتي :

س	3 -	2 -	1 -	0	1	$\frac{5}{4}$	3	4	5
ها (س)	12	8	4	0	4 -	5 -	12 -	16 -	20 -



إن قيم  $s$  مرتبة ترتيباً تصاعدياً بينما قيم  $h$  ( $s$ ) مرتبة ترتيباً تنازلياً ؛ أي أن صور قيم  $s$  بواسطة  $h$  مرتبة بعكس ترتيب قيم  $s$  .

بصفة عامة إذا كانت  $s_1$  ،  $s_2$  قيمتين للمتغير  $s$  بحيث  $s_1 > s_2$  فإن  $4 - s_1 < 4 - s_2$  أي  $h(s_1) < h(s_2)$  .

نقول إن التطبيق  $h$  متناقص .

- يمكن أن نبرهن أن كل تطبيق خطي من  $\mathbb{C}$  إلى  $\mathbb{C}$  معاملة سالب هو تطبيق متناقص .

خلاصة :

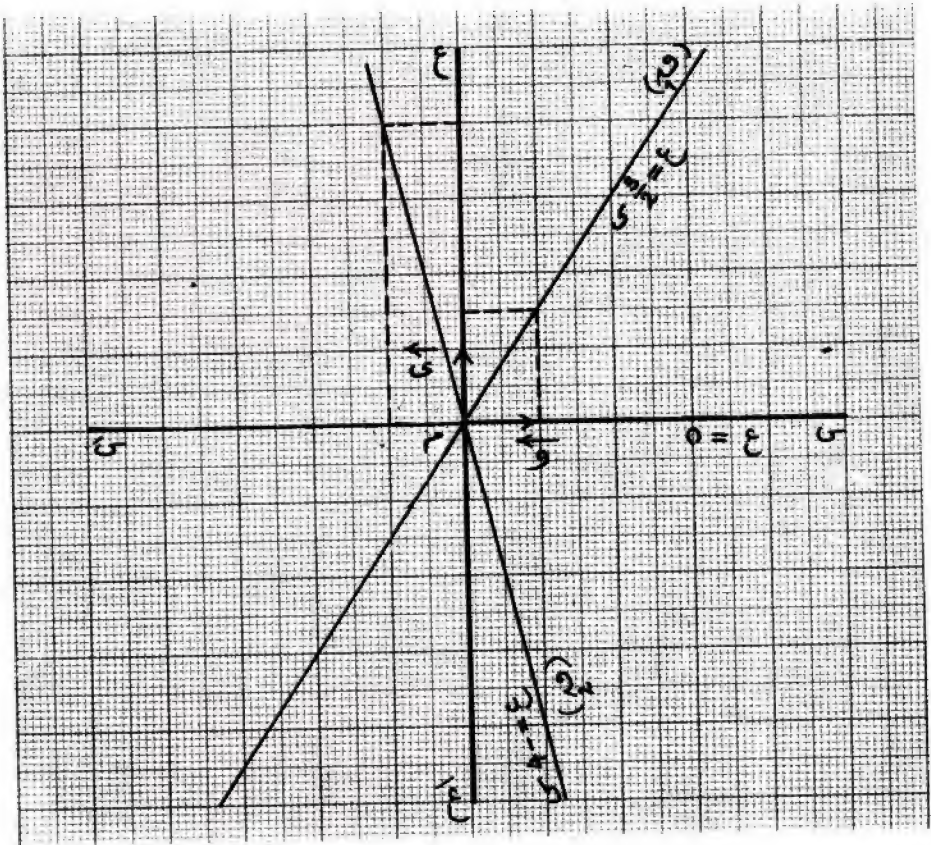
- تا تطبيق خطي من  $\mathbb{C}$  إلى  $\mathbb{C}$  معاملة  $f$  .
- إذا كان  $f = 0$  فإن التطبيق تا ثابت .
- إذا كان  $f < 0$  فإن التطبيق تا متزايد .
- إذا كان  $f > 0$  فإن التطبيق تا متناقص .

ملاحظة :

- مناقشة تزايد أو تناقص أو ثبوت تطبيق خطي يسمى دراسة تغيرات هذا التطبيق .

- لدينا في الشكل 2 (حيث ( م ، و ، س ) معلم متعامد ومتجانس نسبي )  
التمثيل البياني لكل من التطبيقات الخطية الواردة في الأمثلة السابقة أي المستقيمات  
( س ، س ) ، ( و ، و ) ، ( و ، و ) التي معادلاتها على الترتيب :  $0 = ع$  ،

$$ع = \frac{3}{2} س ، ع = -4 س .$$



الشكل 2

## التطبيق التآلفي

### 1. أمثلة وتعريف :

مثال :

رأيت في مثال سابق الجدول الآتي الذي يبين نتائج حركة منتظمة سرعتها 5 كم / سا ، تمت بين النقطتين ب ، ح .

المسافة ( كم )	5	20	45	60	80
الزمن ( سا )	1	4	9	12	16

• لاحظ تناسب المسافات المقطوعة مع مقادير الأزمنة المحددة

انطلاقاً من هذا الجدول عرّفنا تطبيقاً خطياً :

$$\text{تا} : \text{ح} \leftarrow \text{ح} +$$

$$\text{نر} \leftarrow 5$$

وإذا فرضنا الآن أن المتحرك قد قطع قبل النقطة ب مسافة قدرها 2 كم ، ابتداء من النقطة أ وإذا سجلنا الأزمنة ابتداء من النقطة ب فنحصل على الجدول الآتي :

المسافة ( كم )	2	2+5	2+20	2+45	2+60	2+80
الزمن ( سا )	0	1	4	9	12	16

• هل المسافات المقطوعة متناسبة مع مقادير الأزمنة المحددة ؟

انطلاقاً من هذا الجدول نعرف تطبيقاً آخرها .

$$\text{ها} : \text{ح} \leftarrow \text{ح} +$$

$$\text{نر} \leftarrow 5 + 2 .$$

هذا التطبيق يسمى تطبيقاً تآلفياً .

كل من التطبيقات الآتية :

$$ها_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$ها_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$س \mapsto 3 - س$$

$$س \mapsto \frac{4}{7} - س + 1$$

$$ها_3 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$س \mapsto \sqrt{2} - س$$

يسمى تطبيقاً تآلفياً .

تعريف :

ا، ب عدديان حقيقيان .  
التطبيق تا :  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $س \mapsto ا + س + ب$   
يسمى تطبيقاً تآلفياً .

نكتب : تا :  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$س \mapsto ا + س + ب$$

ملاحظة :

- (1) تا :  $س \mapsto ا + س + ب$  تطبيق تآلفي من  $\mathbb{C}$  إلى  $\mathbb{C}$
- إذا كان  $ب = 0$  فإن تا (س) =  $ا + س$  . ويكون تا هو التطبيق الخطي الذي معاملته ا نستنتج أن كل تطبيق خطي هو تطبيق تآلفي خاص .
  - إذا كان  $ا = 0$  فإن تا (س) =  $ب + س$  ويكون تا تطبيقاً تآلفياً ثابتاً .
- (2) كل من التطبيقات من  $\mathbb{C}$  إلى  $\mathbb{C}$  الآتية ليس تطبيقاً تآلفياً :

$$س \mapsto 3 - س^2 ؛ س \mapsto 4 - س - 5 س^2 + 1$$

$$س \mapsto \frac{1}{س} ، س \mapsto \frac{3 - س}{2 - س}$$



## 2. التمثيل البياني لتطبيق تآلفي :

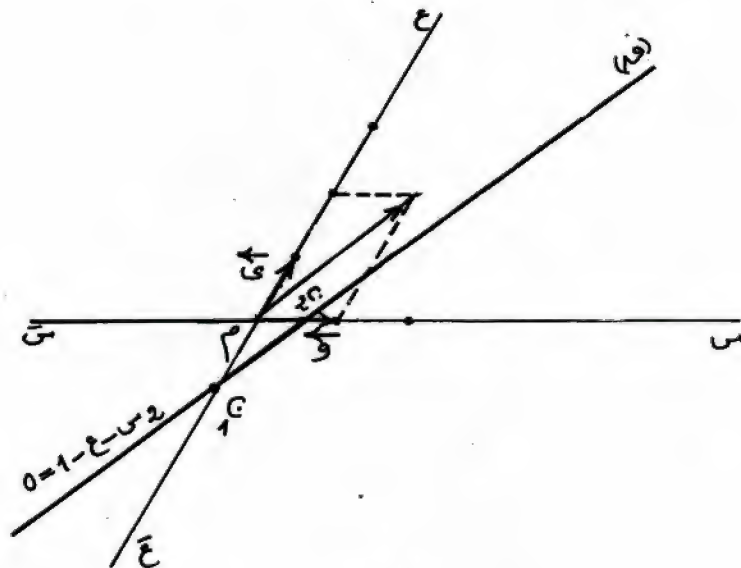
مثال :

تا تطبيق تآلفي معروف كما يلي :  $s \leftarrow 2 - s - 1$   
 لنعين في مستو مزود بمعلم (م ، و ،  $\vec{s}$ ) مجموعة النقط  $\mathcal{C}$  (س ، ع) حيث  
 $\mathcal{C} = 2 - s - 1$ .

نعلم أن المعادلة  $\mathcal{C} = 2 - s - 1$  تكافئ المعادلة  
 $2 - s - \mathcal{C} = 1$  ، والمعادلة  $0 = 1 - \mathcal{C} - s - 2$  تمثل في المستوي مستقيماً

(و) يوازي الشعاع  $\vec{s}$   $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  ويشمل النقطتين  $\mathcal{C}_1(0, 1)$  ،

$\mathcal{C}_2(0, \frac{1}{2})$  (الشكل 3)



الشكل 3

بصفة عامة :

التطبيق التآلفي تا حيث تا (س) = 1 + س + م  
 يمثل في معلم (م، و، ع) بمستقيم معادلته 1 + س - ع + م = 0  
 هذا المستقيم يشمل النقطة هـ (0، م) ويوازي الشعاع  
 $\vec{ش} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

### 3. مقارنة صورتين عددين بتطبيق تآلفي :

مثال 1 :

تا تطبيق تآلفي حيث تا (س) = 2 + س + 1 .  
 في الجدول الآتي بعض القيم للمتغير س وصورها بالتطبيق تا .

س	3 -	2 -	1 -	0	1	2	3	4
تا (س)	5 -	3 -	1 -	1	3	5	7	9

لاحظ في الجدول أن قيم س مرتبة بنفس ترتيب قيم تا (س) ،  
 أي مرتبة ترتيباً تصاعدياً .

وعموماً إذا كانت س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> قيمتين للمتغير س وكان س<sub>1</sub> > س<sub>2</sub>  
 فإن 2 + س<sub>1</sub> > 1 + س<sub>2</sub> أي تا (س<sub>1</sub>) > تا (س<sub>2</sub>) .  
 نقول إن التطبيق تا متزايد . (معامل س في هذا المثال موجب)

## مثال 2 :

تا تطبيق تآلني بحيث تا (س) =  $2 - 3 + 3$  .  
في الجدول الآتي بعض القيم للمتغير س وصورها بواسطة التطبيق تا .

س	3 -	2 -	1 -	0	1	2	3	4	5
تا (س)	9	7	5	3	1	1 -	3 -	5 -	7 -

لاحظ في الجدول أن قيم س مرتبة بعكس ترتيب قيم تا (س) ،  
وعموماً إذا كانت س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> قيمتين للمتغير س وكان س<sub>1</sub> > س<sub>2</sub> فإن  
 $2 - 3 + 3 < 2 - 3 + 3$  أي تا (س<sub>1</sub>) < تا (س<sub>2</sub>) .  
نقول إن التطبيق تا متناقص . (معامل س في هذا المثال سالب)  
بصفة عامة نستنتج ما يلي :

- تا تطبيق تآلني حيث تا (س) =  $f + 3$  .
- إذا كان  $f < 0$  فإن التطبيق تا متزايد .
  - إذا كان  $f > 0$  فإن التطبيق تا متناقص .
  - إذا كان  $f = 0$  فإن التطبيق تا ثابت .

**ملاحظة :** مناقشة تزايد أو تناقص أو ثبوت تطبيق تآلني تسمى دراسة تغيرات هذا التطبيق .

## تمارين

1. يبين أن الأعداد الحقيقية 5 ، 15 ، 20 ، 25 متناسبة على الترتيب مع الأعداد الحقيقية 12 ، 36 ، 48 ، 60 .

2. يبين أن الأعداد الحقيقية  $\frac{2}{3}$  ،  $\frac{5}{7}$  ،  $\frac{12}{5}$  ،  $\frac{18}{7}$  بهذا الترتيب تشكل تناسباً .

3. (1) هل الأعداد الحقيقية 8 ، 35 ، 28 ، 10 بهذا الترتيب تشكل تناسباً .

(2) كيف يمكن ترتيبها حتى تشكل تناسباً :

4. يبين أن الأعداد الحقيقية  $2\sqrt{2}$  ،  $12$  ،  $-\sqrt{27}$  ، 50 متناسبة على الترتيب مع الأعداد الحقيقية  $32\sqrt{2}$  ،  $24$  ،  $-\sqrt{6}$  ، 100 .

5. احسب العدد الحقيقي س في كل من الحالات الآتية :

$$\begin{aligned} \frac{3-}{5} = \frac{س}{15-} & ; \frac{-}{12} = \frac{س}{16} & ; \frac{9-}{4} = \frac{5 س}{3-} & ; \frac{2-}{3} = \frac{8+}{5} \\ \frac{س}{3\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} & ; \frac{س}{2-} = \frac{15}{27-} \end{aligned}$$

6. أوجد العدد الحقيقي س بحيث تشكل الأعداد :

س ، 6+ ، 9- ، 8- تناسلاً .

نفس السؤال في كل مما يلي :

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{5} ، س ، -\frac{18}{15} \text{ و } \sqrt{3} ، س ، -\sqrt{6} ، -\sqrt{2} .$$

و -5 ، س ، -3 ، 3،8 و  $\sqrt{5}$  ،  $\sqrt{20}$  ،  $-\sqrt{2}$  ، س .



7. احسب وسطاً متناسباً لكل ثنائية من الأعداد الحقيقية الآتية :

$$\left\{ \frac{14}{3}, \frac{6}{7} \right\} ; \{12, 5, 2\} ; \{ \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{2} \} ; \{3, 48\} ; \{27, 3\}$$

• في التمارين من 8 إلى 11 : ا، ب، ح، د أعداد حقيقية غير معدومة .

$$8. (1) \text{ يبين أنه إذا كان } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{د} \text{ فإن } \frac{ا+ب}{د} = \frac{ب+ا}{د} .$$

$$(2) \text{ يبين أنه إذا كان : } \frac{ا+ب}{د} = \frac{ب+ا}{د} \text{ فإن } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{د} .$$

9. برهن ما يلي :

$$(1) \text{ إذا كان } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{د} \text{ فإن } \frac{ا-ب}{د} = \frac{ب-ا}{د}$$

$$(2) \text{ إذا كان } \frac{ا-ب}{د} = \frac{ب-ا}{د} \text{ فإن } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{د}$$

10. برهن أنه :

$$(1) \text{ إذا كان } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{د} \text{ فإن } \frac{ا}{3-ا} = \frac{ب}{3-ب}$$

$$(2) \text{ إذا كان } \frac{ا}{3-ا} = \frac{ب}{3-ب} \text{ فإن } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{د}$$

11. برهن أنه :

$$0 \neq 3-ا$$

و

$$0 \neq 3-ب$$

حيث

$$(1) \text{ إذا كان } \frac{ا}{ب} = \frac{ب}{د} \text{ فإن } \frac{ا}{3+ا} = \frac{ب}{3+ب}$$

$$\frac{ا}{3-ا} = \frac{ب}{3-ب}$$

12. س، ع عدنان حقيقيان .

$$\text{نضع } س+ع=م، س-ع=ف، \frac{س}{ع}=ك .$$

- احسب س ، ع في كل من الحالات الآتية :

$$(1) \text{ م } - = 40 ، \text{ ك } = \frac{2}{3} .$$

$$(2) \text{ م } = 55 ، \text{ ك } = \frac{9}{5} .$$

$$(3) \text{ ف } = 16,8 ، \text{ ك } = 0,3 .$$

$$(4) \text{ ف } - = 32 ، \text{ ك } = \frac{3}{5} .$$

13. العددان الطبيعيان س ، ع يحققان العلاقة  $س \times 135 = ع \times 225$  .

$$(1) \text{ احسب النسبة } \frac{س}{ع} .$$

(2) احسب س ، ع في كل من الحالات الآتية :

$$(أ) س + ع = 288 .$$

$$(ب) س - ع = 128 .$$

$$(ج) س \times ع = 135 .$$

14. أوجد ثلاثة أعداد متناسبة مع الأعداد 3 ، 5 ، 7 بحيث يكون مجموعها 225 .

15. أوجد ثلاثة أعداد متناسبة مع الأعداد - 2,4 ، 1,6 ، - 0,8 بحيث يكون مجموعها - 4,4 .

16. محيط قطعة أرض على شكل مثلث يساوي 108 م .

وأطوال أضلاعه متناسبة مع الأعداد 4 ، 5 ، 6 .

- فما هي أطوال أضلاعه ؟

أ ، ب ، ج ، د أعداد حقيقية حيث ب و د غير معدومين

$$17. \text{ برهن أنه : (1) إذا كان } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ فإن } \frac{أ^2}{ب^2} = \frac{ج^2}{د^2} .$$

$$(2) \text{ إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ فإن } \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}.$$

$$18. \text{ برهن أنه : (1) إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ فإن } \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{c^2 + d^2}{d^2} \text{ (حيث } b \neq 0 \text{ و } d \neq 0)$$

$$(2) \text{ إذا كان } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ فإن } \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{c^2 + d^2}{c^2 - d^2} \text{ حيث } b \neq 0 \text{ و } d \neq 0 \text{ و } a^2 - b^2 \neq 0 \text{ و } c^2 - d^2 \neq 0.$$

$$19. \text{ تا تطبيق خطي حيث تا (س) } = \frac{3}{4} \text{ س.}$$

$$(1) \text{ قارن بين تا } (1 + \sqrt{2}) \text{ و تا } (\sqrt{2}) + \text{ تا } (1).$$

$$(2) \text{ قارن بين تا } (2\sqrt{3}) \text{ و تا } (\sqrt{3}).$$

$$20. (1) \text{ بين أن الأعداد الحقيقية } -6, 3, -1 \text{ متناسبة مع الأعداد الحقيقية}$$

$$8, -4, \frac{4}{3} \text{ ما هو معامل التناسب؟}$$

$$(2) \text{ استنتج التطبيق الخطي تا المعين بهذا التناسب.}$$

$$(3) \text{ احسب تا } (0) ; \text{ تا } (\sqrt{3}) ; \text{ تا } (-2) ; \text{ تا } \left(\frac{1}{2}\right) ; \text{ تا } \left(-\frac{2}{5}\right).$$

$$21. \text{ من بين التطبيقات الخطية الآتية ما هي التطبيقات المتزايدة؟ وما هي التطبيقات المتناقصة؟}$$

$$\text{تا : س} \mapsto \frac{2}{5} \text{س , ها : س} \mapsto \sqrt{3} \text{س}$$

$$\text{لا : س} \mapsto -2,5 \text{س ; ما : س} \mapsto \frac{3}{7} \text{س.}$$

22. (1) ادرس تغيرات كل من التطبيقات الخطية الآتية :

$$\text{تا : س} \longleftarrow \text{س} - \frac{4}{5} \text{ ؛ ها : س} \longleftarrow \text{س} - 3$$

$$\text{لا : س} \longleftarrow \text{س} - 4$$

(2) مثل بياناً كلاً من التطبيقات السابقة في معلم (م ، و ، ٥)

23. (1) ادرس تغيرات كل من التطبيقات الخطية الآتية :

$$\text{تا : س} \longleftarrow \text{س} - \frac{1}{4} \text{ ؛ ها : س} \longleftarrow \text{س} - 0,2 \text{ ؛ لا : س} \longleftarrow \text{س} - 1,5$$

(2) مثل بياناً التطبيقات تا ، ها ، لا

$$24. \text{ تا تطبيق خطي بحيث س} \longleftarrow \text{س} - \frac{2}{3}$$

$$(1) \text{ احسب تا } (0) \text{ ؛ تا } (-2) \text{ ؛ تا } (\sqrt{3}) \text{ ؛ تا } \left(\frac{1}{3}\right)$$

(2) عيّن العدد الذي صورته بواسطة تا هي 0 ،

احسب س بحيث تا (س) = -10 ؛ احسب س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> بحيث تا (س<sub>1</sub>) = 8 ، تا (س<sub>2</sub>) = -9 .

(3) مثل بياناً التطبيق تا في معلم (م ، و ، ٥) .

25. ها تطبيق خطي بحيث ها (7) = -3

(1) عيّن معامل التطبيق ها .

(2) احسب ها (14) ؛ ها (-7) ؛ ها (3,5) ؛ ها (-10,5) .

(3) مثل بياناً التطبيق ها في معلم (م ، و ، ٥) .

26. (1) من بين التطبيقات التآلفية الآتية ما هي التطبيقات المتزايدة ؟ والتطبيقات المتناقصة ؟

$$\text{تا : س} \longleftarrow \text{س} - \frac{2}{3} - 1 \text{ ؛ ها : س} \longleftarrow \text{س} - \frac{3}{2} + 5$$

$$\text{لا : س} \longleftarrow \text{س} - 2 + 5$$



(2) مثل بياناً كلاً من هذه التطبيقات .

27. (1) عيّن التطبيق التآلفي تا :  $s \mapsto s + 1$  ، إذا علمت أن :  
تا (0) = 3 ، تا (1) = 2 .

(2) ادرس تغيرات التطبيق تا . مثله بياناً في معلم (م ، و ، ح) .

28. (م ، و ، ح) معلم للمستوي

(1) عيّن التطبيق التآلفي الذي بيانه يشمل النقطتين

$$A \left( 5 , \frac{1}{2} \right) , B (4 , -2) .$$

(2) مثل بياناً التطبيق تا .

(3) هل النقطة  $C (0 , 5)$  تنتمي إلى بيان التطبيق تا ؟

29. تا ، ها تطبيقان بحيث :

$$\text{تا (س) = س + 1 , ها (س) = س - } \frac{2}{3} .$$

(1) حل في ح المعادلة تا (س) = ها (س) .

(2) مثل بياناً كلاً من تا ، ها في معلم (م ، و ، ح) .

30. (1) ارسم المستقيمين (ق) ، (ك) المعرفين بالتطبيقات الآتيتين :

$$\text{تا : س} \mapsto \frac{1}{3} \text{س} + 1 , \text{ها : س} \mapsto \frac{1}{3} \text{س} - 5 .$$

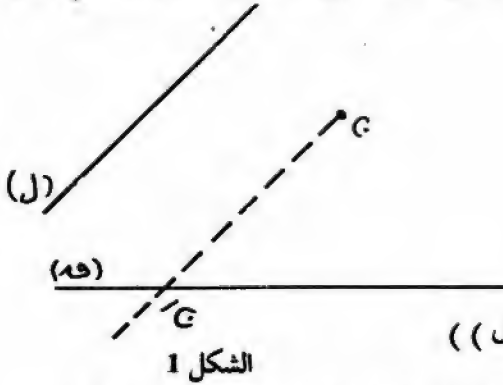
(2) عيّن التطبيق التآلفي ها :  $s \mapsto s + 1$  ، إذا علمت أن : ها (2) = 3 ،  
ها (4) = 1 .

(3) ادرس تغيرات التطبيق ها ثم مثله بياناً في معلم (م ، و ، ح) .

## الإسقاطات

### 1. الإسقاط الموازي لمستقيم على مستقيم :

(و) ، (ل) مستقيمان غير متوازيين ؛ ه نقطة من المستوي ، (الشكل 1)



نعلم أنه يوجد مستقيم وحيد  
يشمل النقطة ه ويوازي  
المستقيم (ل) ، هذا المستقيم  
يقطع (و) في نقطة

وحيدة ه (لأن (و) لا يوازي (ل))

النقطة ه تسمى **مسقط** النقطة ه على المستقيم (و) وفق منحنى (ل) .

نقول أيضا إن ه هي **مسقط** ه على (و) وفق (ل) .

• إذا كانت ه (و) فإن مسقطها على (و) هو ه نفسها .

• إذا كانت ه (ل) فإن مسقطها على (و) وفق (ل) هو نقطة تقاطع

(ل) و (و) .

بصفة عامة :

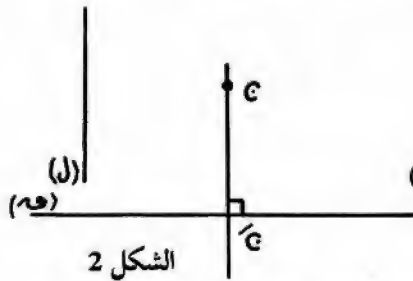
مهما كانت النقطة ه من المستوي ، فتوجد نقطة وحيدة ه من المستقيم (و) بحيث  
تكون النقطة ه هي مسقط ه على (و) وفق (ل) ، نعرف بذلك تطبيقاً من  
المستوي إلى المستقيم (و) يسمى **الإسقاط الموازي للمستقيم (ل) على المستقيم**  
(و) .

## تعريف :

(و) ، (ل) مستقيمان غير متوازيين .  
 الإسقاط الموازي للمستقيم (ل) على المستقيم (و) هو التطبيق الذي يرفق كل نقطة من المستوي بمسقطها على المستقيم (و) وفق (ل) .

### حالة خاصة : الإسقاط العمودي .

إذا كان (و) ، (ل) مستقيمين متعامدين وكانت  $\rho$  نقطة من المستوي فإن



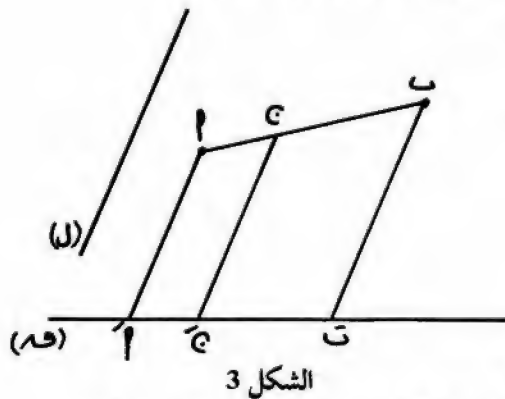
مسقط النقطة  $\rho$  على (و) وفق (ل)  
 يسمى المسقط العمودي للنقطة  $\rho$  .

والإسقاط الموازي للمستقيم (ل) على (و)  
 يسمى الإسقاط العمودي على (و)

2. مسقط تدريج منتظم لمستقيم على مستقيم آخر وفق منحى :

### (1) مسقط قطعة مستقيمة :

(و) ، (ل) مستقيمان غير متوازيين ، [أب] قطعة مستقيمة (الشكل 3) .  
 أ' ، ب' هما مسقطا النقطتين أ ، ب على (و) وفق (ل)



إذا كانت  $\rho$  نقطة من [أب] فإن  
 مسقطها على (و) وفق (ل) هو  
 نقطة  $\rho$  من [أ'ب'] .

• وبصفة عامة :

نقبل أن مسقط كل

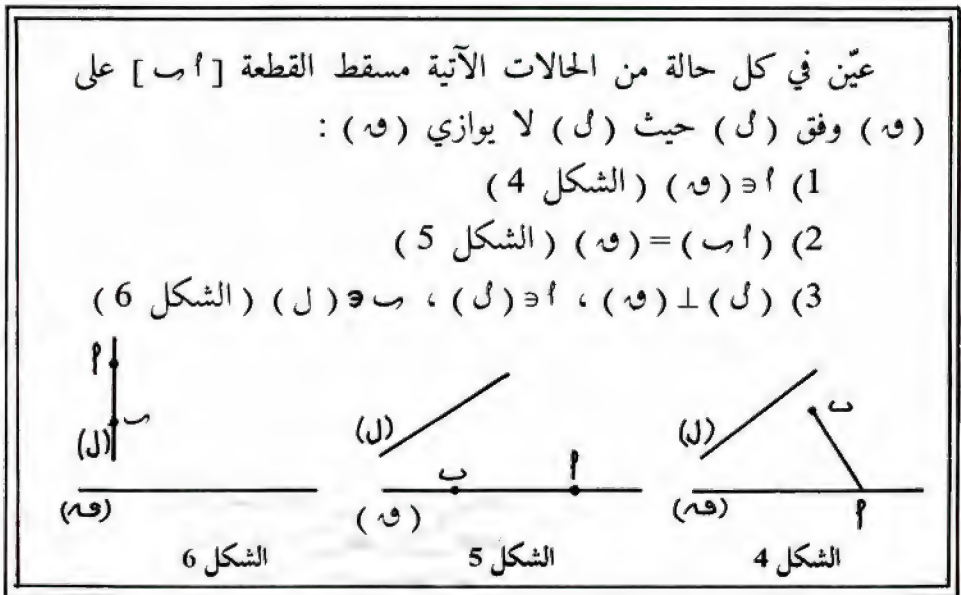
نقطة من [أب] على (و)

وفق (ل) هو نقطة من [أ'ب'] .

القطعة [أ'ب'] تسمى مسقط القطعة [أب] على (و) وفق (ل) .

ملاحظة :

- (1) إذا كان  $(أ ب) // (و)$  فإن  $أ ب' = أ ب$  .
- (2) إذا كان  $(أ ب) // (ل)$  فإن مساقط نقط القطعة  $[أ ب]$  على  $(و)$  وفق  $(ل)$  متطابقة ، فيكون مسقط  $[أ ب]$  في هذه الحالة هو نقطة تقاطع المستقيمين  $(أ ب)$  و  $(و)$  .

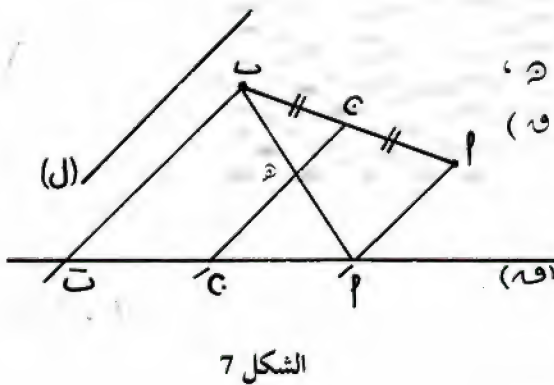


(2) مسقط منتصف قطعة مستقيمة

$[أ ب]$  قطعة مستقيمة منتصفها  $د$  ،  
 $[أ ب']$  هو مسقط  $[أ ب]$  على  $(و)$  وفق  $(ل)$  .

$د'$  هو مسقط  $د$  على  $(و)$  وفق  $(ل)$  .

لنبرهن أن  $د'$  هي منتصف  $[أ ب']$  .





### البرهان :

بما أن مسطوي النقطتين  $a$  ،  $b$  على  $(q)$  وفق  $(l)$  هما  $a'$  ،  $b'$  فإن  
 $(aa') // (bb')$  .

نضع  $(a'b) \cap (bb') = \{h\}$  .

في المثلث  $aa'b$  المستقيم  $(bb')$  يشمل  $h$  منتصف  $[ab]$  ويوازي  $(aa')$  ، فهو  
 يشمل منتصف الضلع الآخر  $[ba']$  ، إذن النقطة  $h$  هي منتصف  $[a'b]$  .  
 وفي المثلث  $a'b'b'$  المستقيم  $(bb')$  يشمل  $h$  منتصف  $[a'b]$  ويوازي  
 $(bb')$  ، فهو يشمل منتصف الضلع الآخر  $[a'b']$  ، فالنقطة  $h$  هي  
 منتصف  $[a'b']$  .

### نتيجة :

مسطو منتصف قطعة مستقيمة هو منتصف مسقط هذه القطعة .

### ملاحظة :

$$ab = \frac{1}{2} ab \text{ أي } \frac{1}{2} = \frac{ab}{ab}$$

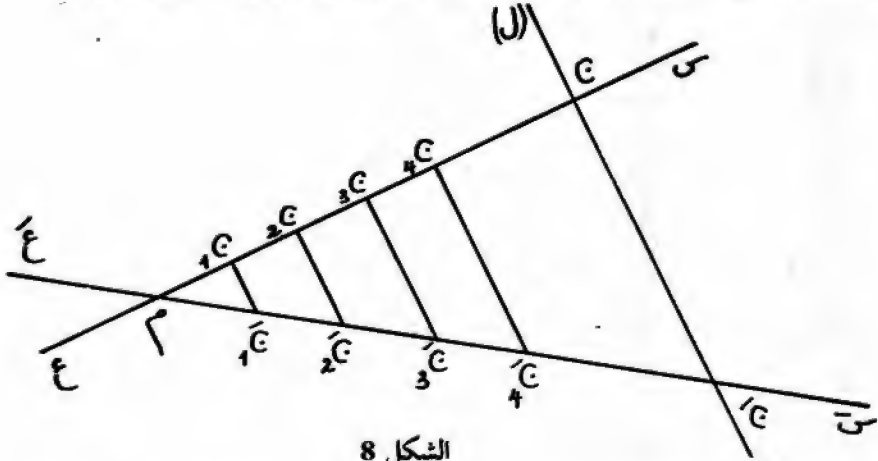
$$\text{وأبضا } a'b' = \frac{1}{2} a'b' \text{ أي } \frac{1}{2} = \frac{a'b'}{a'b'}$$

$$\text{نستنتج أن : } \frac{ab}{a'b'} = \frac{ab}{a'b'} \text{ أي } \frac{ab}{a'b'} = \frac{a'b'}{a'b'}$$

هذا يعني أن الطولين  $ab$  ،  $a'b'$  متناسبان على الترتيب مع الطولين  $a'b'$  ،  $a'b$  .

### (3) مسقط تدريج منتظم .

(س ع) ، (س'ع') مستقيمان متقاطعان في النقطة م ، (ل) مستقيم لا يوازي أيًا منهما ؛ م ،  $ه'_1$  ،  $ه'_2$  ،  $ه'_3$  ، ..... هي نقط تدريج منتظم لنصف المستقيم [م س] ، مساقط هذه النقط على (س'ع') وفق (ل) هي النقط م ،  $ه'_1$  ،  $ه'_2$  ،  $ه'_3$  ، ..... وحسب النتيجة الواردة في الفقرة 2 . فالنقطة  $ه'_1$  هي منتصف [م  $ه'_2$ ] لأن  $ه'_1$  هي منتصف [م  $ه'_2$ ] أي م  $ه'_1$  =  $ه'_1$   $ه'_2$  (1)



الشكل 8

والنقطة  $ه'_2$  هي منتصف [م  $ه'_3$ ] لأن  $ه'_2$  هي منتصف [م  $ه'_3$ ]

أي  $ه'_1$   $ه'_2$  =  $ه'_2$   $ه'_3$  (2)

ومن (1) ، (2) يتبع أن م  $ه'_1$  =  $ه'_1$   $ه'_2$  =  $ه'_2$   $ه'_3$  . وبصفة عامة

يمكن أن نبرهن أن : م  $ه'_1$  =  $ه'_1$   $ه'_2$  =  $ه'_2$   $ه'_3$  =  $ه'_3$   $ه'_4$  = ..... .

فالنقط م ،  $ه'_1$  ،  $ه'_2$  ،  $ه'_3$  ،  $ه'_4$  ، ..... هي نقط تدريج منتظم لنصف

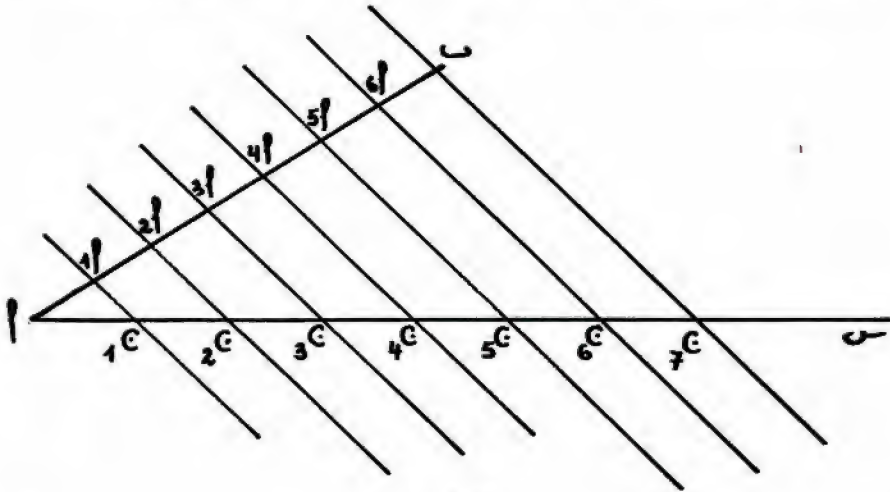
المستقيم [م س] ؛ هذا التدريج يسمى مسقط التدريج المنتظم لنصف المستقيم

[م س] . لاحظ أن المستقيمت (م  $ه'_1$ ) ، (م  $ه'_2$ ) ، (م  $ه'_3$ ) ، ..... متوازية لأن كلاً منها يوازي (ل) .

نتيجة :

مسطق تدرج منتظم هو تدرج منتظم .

(4) تقسيم قطعة مستقيمة :  
[أ ب] قطعة مستقيمة يراد تقسيمها مثلاً إلى سبع قطع متقايسة .



الشكل 9

- نرمم نصف مستقيم [أ س ، ونأخذ عليه تدرجياً منتظماً  
(أ ، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7) .
- نرمم المستقيم (ب 7)، ونسمي مساقط النقط 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، .....  
على (أ ب) وفق (ب 7) النقط 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، ..... على التوالي .
- فالنقط 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7 هي نقط تدرج منتظم للقطعة  
[أ ب] ، وبذلك نحصل على التقسيم المطلوب .

### ملاحظة :

• كل من النقط  $A_1$  ،  $A_2$  ، ..... ،  $A_6$  تقسم  $[AB]$  من الداخل بنسبة

$$\text{معلومة مثلاً } \frac{1}{6} = \frac{A_1A}{A_1B} \text{ ؛ } \frac{2}{5} = \frac{A_2A}{A_2B} \text{ ؛ } \frac{6}{1} = \frac{A_6A}{A_6B}$$

• إذا اخترنا على  $(AB)$  معلماً مثل  $(A_1)$  فيكون :

$$\frac{1}{6} = \frac{A_1A}{A_1B} \text{ ، } \frac{2}{5} = \frac{A_2A}{A_2B} \text{ ، } \frac{6}{1} = \frac{A_6A}{A_6B}$$

لاحظ أن كلا من هذه النسب سالبة .

### بصفة عامة :

كل نقطة من قطعة مستقيمة تقسم هذه القطعة من الداخل بنسبة سالبة .

نقبل أن كل نقطة تنتمي إلى حامل قطعة ولا تنتمي إلى القطعة تقسم هذه القطعة من الخارج بنسبة موجبة .

$$\text{مثلاً في الشكل السابق لدينا } \frac{3}{7} = \frac{A_3A}{A_3B}$$

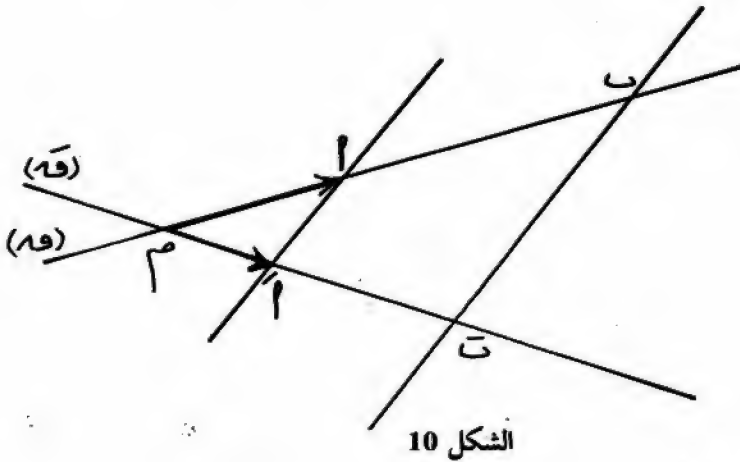
نقول إن النقطة  $A$  تقسم القطعة  $[A_3B]$  من الخارج بالنسبة الموجبة  $+\frac{3}{7}$  .



## نظرية طالس وتطبيقات

### 1. مسألة تمهيدية :

(ق) ، (ق') مستقيمان متقاطعان في النقطة م .  
 (م ، م') معلم للمستقيم (ق) ؛ (م ، م') معلم للمستقيم (ق') ؛  
 ب نقطة من (ق) فاصلتها س ؛ ب' نقطة من (ق') فاصلتها س' .  
 (الشكل 10) .



لنبرهن ما يلي :

- (1) إذا كان  $(AA') // (BB')$  فإن  $S = S'$  .
- (2) إذا كان  $S = S'$  فإن  $(AA') // (BB')$  .

**البرهان :**

- (1) نفرض أن  $(BB') // (AA')$  ولنبرهن أن  $S = S'$  .  
 بما أن  $(BB') // (AA')$  فإن  $\overline{MB} // \overline{MA'}$   
 هذا يعني أنه يوجد عدد حقيقي ك بحيث  $\overline{MA'} = K \cdot \overline{MB}$   
 لكن  $\overline{MB} - \overline{MA} = \overline{MA'} - \overline{MA} = \overline{AA'}$  و  $\overline{MB} - \overline{MA} = \overline{AA'}$

إذن  $\overrightarrow{م\overline{ب}} - \overrightarrow{م\overline{أ}} = \overrightarrow{ك} = (\overrightarrow{م\overline{أ}} - \overrightarrow{م\overline{ب}})$   
 أي  $\overrightarrow{م\overline{ب}} - \overrightarrow{م\overline{أ}} = \overrightarrow{ك} = \overrightarrow{ك\overline{م}} - \overrightarrow{ك\overline{أ}}$   
 ونعلم أن  $\overrightarrow{م\overline{ب}} = \overrightarrow{س'}$  ،  $\overrightarrow{م\overline{أ}} = \overrightarrow{س}$  .  
 نستنتج أن :

$\overrightarrow{س'م\overline{أ}} - \overrightarrow{س\overline{م\overline{أ}}} = \overrightarrow{ك\overline{م\overline{أ}}} - \overrightarrow{ك\overline{م\overline{ب}}}$   
 $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{س'م\overline{أ}} - \overrightarrow{س\overline{م\overline{أ}}} + \overrightarrow{ك\overline{م\overline{أ}}} - \overrightarrow{ك\overline{م\overline{ب}}}$   
 $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{س'م\overline{أ}} (\overrightarrow{ك} - \overrightarrow{س}) + \overrightarrow{ك\overline{م\overline{أ}}}$   
 ومنه  $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{س'م\overline{أ}} (\overrightarrow{ك} - \overrightarrow{س}) + \overrightarrow{ك\overline{م\overline{أ}}}$   
 هذا يعني أن مركبتي الشعاع المعلوم في الأساس ( $\overrightarrow{م\overline{أ}}$  ،  $\overrightarrow{م\overline{ب}}$ ) هما العددان  
 ( $\overrightarrow{س'}$  -  $\overrightarrow{ك}$ ) و ( $\overrightarrow{ك}$  -  $\overrightarrow{س}$ ) ونعلم أنهما معدومتان .  
 إذن  $\overrightarrow{س'}$  -  $\overrightarrow{ك} = 0$  و  $\overrightarrow{ك}$  -  $\overrightarrow{س} = 0$   
 أي  $\overrightarrow{س'} = \overrightarrow{ك}$  و  $\overrightarrow{ك} = \overrightarrow{س}$   
 ومنه  $\overrightarrow{س'} = \overrightarrow{س}$  .

(2) نفرض أن  $\overrightarrow{س} = \overrightarrow{س'}$  ولنبرهن أن (II') // ( $\overrightarrow{ب\overline{أ}}$ ) .  
 نعلم أن  $\overrightarrow{م\overline{ب}} = \overrightarrow{س}$  ،  $\overrightarrow{م\overline{أ}} = \overrightarrow{س'}$  و  $\overrightarrow{م\overline{ب}} = \overrightarrow{س}$  ،  $\overrightarrow{م\overline{أ}} = \overrightarrow{س'}$   
 فيكون :  $\overrightarrow{م\overline{ب}} - \overrightarrow{م\overline{أ}} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{س'}$   
 لكن  $\overrightarrow{س} = \overrightarrow{س'}$

إذن :  $\overrightarrow{م\overline{ب}} - \overrightarrow{م\overline{أ}} = \overrightarrow{س} - \overrightarrow{س} = \overrightarrow{0}$   
 $\overrightarrow{م\overline{ب}} - \overrightarrow{م\overline{أ}} = \overrightarrow{0}$  ،  $\overrightarrow{م\overline{ب}} = \overrightarrow{م\overline{أ}}$

وحسب علاقة شال لدينا :  
 $\overrightarrow{م\overline{ب}} - \overrightarrow{م\overline{أ}} = \overrightarrow{ب\overline{أ}}$  و  $\overrightarrow{م\overline{ب}} = \overrightarrow{م\overline{أ}}$   
 نستنتج أن  $\overrightarrow{ب\overline{أ}} = \overrightarrow{س}$  . هذا يعني أن الشعاعين  $\overrightarrow{ب\overline{أ}}$  و  $\overrightarrow{ب\overline{أ}}$  متوازيان .  
 ومنه ( $\overrightarrow{ب\overline{أ}}$ ) // (II') .

## نظرية :

(ق) ، (ق') مستقيمان متقاطعان في م .  
 (م ، م') معلم للمستقيم (ق) و (م ، م') معلم للمستقيم (ق') ،  
 ب نقطة من (ق) ، ب' نقطة من (ق') .  
 (فاصلتا ب و ب' متساويتان) معناه  $(بب') // (قق')$

ملاحظة : في الشكل 10 لدينا أيضًا :

$$\overline{م'م} = \overline{م'ب} \text{ و } \overline{م'م} = \overline{م'ب'}$$

$$\text{نستنتج أن : } \frac{\overline{م'م}}{\overline{م'ب}} = \frac{\overline{م'م}}{\overline{م'ب'}}$$

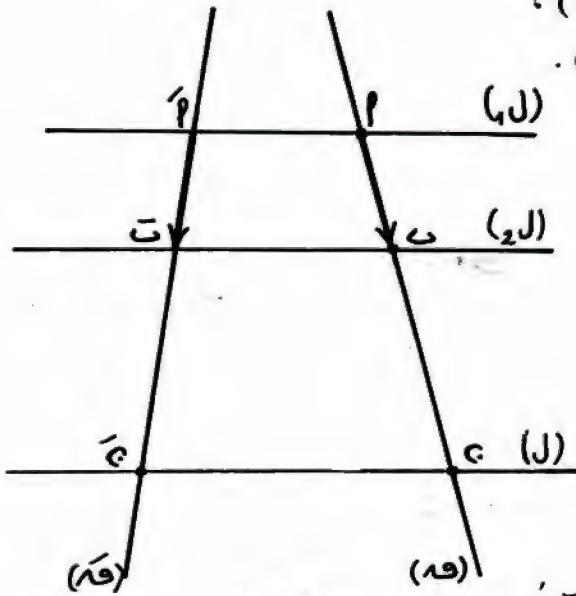
(ق) ، (ق') مستقيمان متوازيان ؛ (م ، م') معلم للمستقيم (ق) ،  
 (م' ، م') معلم للمستقيم (ق') حيث  $(م'م) // (م'م')$   
 ه نقطة من (ق) فاصلتها س ، ه' نقطة من (ق') فاصلتها س' .  
 برهن أن :

$$س = س' \text{ معناه } (هه') // (مم')$$

## 2. نظرية طالس :

(ل<sub>1</sub>) ، (ل<sub>2</sub>) مستقيمان متوازيان ، (ق) ، (ق') مستقيمان حيث :  
 (ق) يقطع (ل<sub>1</sub>) و (ل<sub>2</sub>) في ا ، ب ؛ (ق') يقطع (ل<sub>1</sub>) و (ل<sub>2</sub>) في ا' ، ب' . (الشكل 11)  
 (ل) مستقيم يوازي (ل<sub>1</sub>) و (ل<sub>2</sub>) ويقطع (ق) و (ق') في و و و' .  
 - لنبرهن أن  $\frac{\overline{ا'و}}{\overline{او}} = \frac{\overline{ب'و}}{\overline{بو}}$

البرهان :



الشكل 11

نزود المستقيم (ق) بالمعلم (ا، ا') ،  
والمستقيم (ق') بالمعلم (ا'، ا').  
ونسمي س فاصلة النقطة د ،  
و س' فاصلة النقطة د' .

فيكون :

$$1 = \overline{ab} ; 1 = \overline{a'b'}$$

$$\overline{ad} = س ; \overline{a'd'} = س'$$

نستج أن :

$$\overline{ad} = س = \frac{\overline{ad}}{1} ; \overline{a'd'} = س' = \frac{\overline{a'd'}}{1}$$

وبما أن (د د') // (ا ا') فإن س = س' (حسب النظرية الواردة في الفقرة 2)

$$\frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{a'd'}}{\overline{a'b'}}$$

نظرية :

(ل<sub>1</sub>) و (ل<sub>2</sub>) مستقيمان متوازيان ، (ق) و (ق') مستقيمان  
يقطعان (ل<sub>1</sub>) و (ل<sub>2</sub>) في النقط ا ، ب و ا' ، ب' على التوالي .  
إذا كان (ل) مستقيماً يوازي (ل<sub>1</sub>) و (ل<sub>2</sub>) ويقطع (ق) و (ق') في

$$\frac{\overline{ad}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{a'd'}}{\overline{a'b'}} \text{ فإن } د و د' \text{ التقطنتين}$$



هذه النظرية تسمى نظرية طالس ويمكن أن ننص عليها أيضا كما يلي :

(ق) ، (ق') مستقيمان و (ل) مستقيم لا يوازي أيًا منهما ، إذا كانت أ ، ب ، ج نقط من (ق) مساقطها على (ق') وفق (ل) هي على التوالي أ' ، ب' ، ج' فإن :

$$\frac{AA'}{AB} = \frac{BB'}{AB}$$

ملاحظة :

(1) يمكننا أن نبرهن أيضًا أن :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BB'} ; \frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BB'}$$

(2) إذا كان  $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BB'}$  فإن  $\left| \frac{AA'}{BB'} \right| = \left| \frac{AB}{BB'} \right|$

أي  $\frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|AB|}{|BB'|}$  إذن  $\frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BB'}$

نتيجة :

(ق) ، (ق') مستقيمان و (ل) مستقيم لا يوازي أيًا منهما ، إذا كانت أ ، ب ، ج نقط من (ق) مساقطها على (ق') وفق (ل) هي على التوالي أ' ، ب' ، ج' فإن :

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AB}{BB'}$$

(1)  $AB \parallel CD$  شبه منحرف قاعدتاه  $[AB]$  ،  $[CD]$  ،  
 $H$  نقطة من  $(AB)$  ،  $H'$  نقطة من  $(CD)$  .

$$\frac{AH}{HD} = \frac{A'H'}{H'D'} \text{ فإن } (AB) \parallel (CD) \text{ فإن } \frac{AH}{HD} = \frac{A'H'}{H'D'}$$

(2)  $AB \parallel CD$  متوازي أضلاع .  $H$  منتصف  $[AB]$  .  
 برهن أن المستقيم الذي يشمل النقطة  $H$  ويوازي  $(BC)$  يقطع الضلع  $[CD]$  في منتصفه .

### 3. النظرية العكسية

لنبرهن على النظرية الآتية التي تسمى النظرية العكسية لنظرية طالس .

(1) ، (2) ، (3) مستقيمان ، (4) مستقيم لا يوازي أيًا منها ؛  
 $A, B$  نقطتان من (1) مسقطاهما على (2) وفق (3) هما  $A'$  ،  $B'$  .  
 إذا كانت  $\frac{AA'}{A'B'} = \frac{BB'}{B'C'}$  نقطة من (2) .  $H'$  نقطة من (3) بحيث

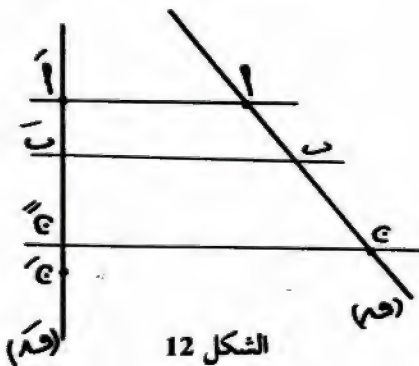
$$\frac{AH}{HD} = \frac{A'H'}{H'D'} \text{ فإن } (AB) \parallel (CD) \text{ فإن } \frac{AH}{HD} = \frac{A'H'}{H'D'}$$

(ج) \_\_\_\_\_

البرهان :

نفرض أن  $H'$  هي مسقط  $H$   
 على (2) وفق (3) ،  
 فيكون حسب نظرية طالس

$$\frac{AH}{HD} = \frac{A'H'}{H'D'}$$





ولكن  $\frac{\overline{a'b'}}{\overline{a'b}} = \frac{\overline{a''b''}}{\overline{a''b''}}$  (حسب المعطيات)

$$\frac{\overline{a'b'}}{\overline{a'b}} = \frac{\overline{a''b''}}{\overline{a''b''}} \text{ إذن}$$

ونستنتج من هذا التناسب أن  $\overline{a'b} = \overline{a''b''}$

أي أن النقطتين  $b'$  ،  $b''$  متطابقتان ، فتكون  $b'$  هي مسقط النقطة  $b$  على  $(\alpha')$  وفق  $(\ell)$  ومنه :  $(b'b') // (\ell)$  .  
يمكن أن نبرهن على النتيجة الآتية :

(و) .  $(\alpha')$  مستقيمان ،  $(\ell)$  مستقيم لا يوازي أيًا منهما .  
ا ، ب نقطتان من  $(\alpha)$  مسقطاهما على  $(\alpha')$  وفق  $(\ell)$  هما  $a'$  ،  $b'$  .  
إذا كانت  $b$  نقطة من  $[ab]$  و  $b'$  نقطة من  $[a'b']$  حيث  $\frac{ab}{ab} = \frac{a'b'}{a'b'}$   
فإن  $(bb') // (\ell)$  .

ا ب ح د شبه منحرف قاعدتاه  $[ad]$  و  $[bc]$  .  
 $b$  نقطة من  $[ab]$  ،  $h$  نقطة من  $[dc]$  .  
برهن أنه إذا كان  $\frac{bh}{bc} = \frac{ad}{ab}$  فإن  $(bh) // (bc)$  .

#### 4. تطبيقات

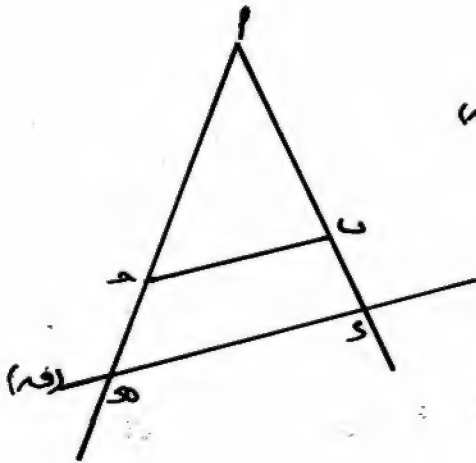
1) تطبيق نظرية طالس على المثلث :

مسألة 1 :

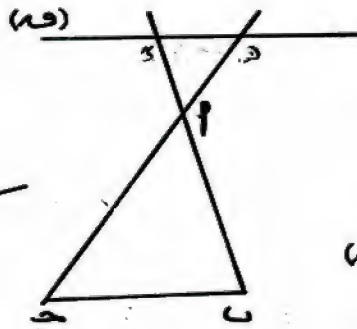
أ ب ح مثلث ؛ ( و ) مستقيم يوازي ( ب ح ) ويقطع ( أ ب ) ، ( أ ح ) في النقطتين د ، هـ . ( الأشكال 13 ، 14 ، 15 ) .

$$\frac{\overline{أ د}}{\overline{أ ب}} = \frac{\overline{أ هـ}}{\overline{أ ح}}$$

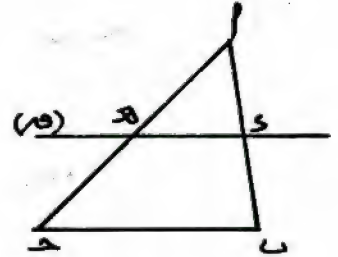
انبرهن أن



الشكل 15



الشكل 14



الشكل 13

البرهان :

بما أن ( و ) // ( ب ح ) فإن مساقط النقط د ، هـ ، أ على ( أ ب ) وفق ( ب ح ) هي على التوالي د ، هـ ، أ .

$$\frac{\overline{أ د}}{\overline{أ ب}} = \frac{\overline{أ هـ}}{\overline{أ ح}}$$

فحسب نظرية طالس لدينا :



## نظرية :

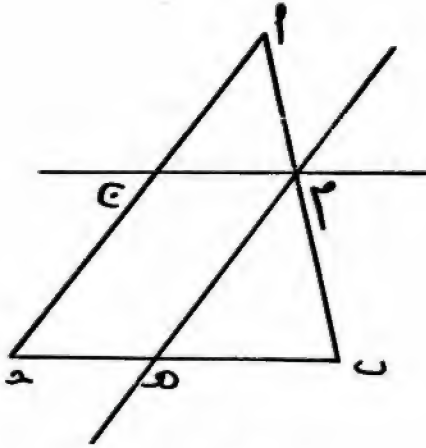
أ ب ح مثلث .  
 و نقطة من (أ ب) ، ه نقطة من (أ ح) .  
 إذا كان (و ه) // (ب ح) فإن  $\frac{\overline{أ ه}}{\overline{أ ب}} = \frac{\overline{أ و}}{\overline{أ ح}}$  و  $\frac{\overline{أ و}}{\overline{أ ح}} = \frac{\overline{أ ه}}{\overline{أ ب}}$  .

يمكن أن نبرهن باستخدام النظرية العكسية لنظرية طالس على ما يلي :

أ ب ح مثلث .  
 و نقطة من (أ ب) ، ه نقطة من (أ ح) .  
 إذا كان  $\frac{\overline{أ ه}}{\overline{أ ب}} = \frac{\overline{أ و}}{\overline{أ ح}}$  فإن (و ه) // (ب ح) .  
 أيضا إذا كانت و ه [أ ب] و ه [أ ح] و  $\frac{\overline{أ و}}{\overline{أ ح}} = \frac{\overline{أ ه}}{\overline{أ ب}}$  فإن (و ه) // (ب ح) .

## مسألة 2 :

أ ب ح مثلث ، م نقطة من [أ ب] و ن نقطة من [أ ح] بحيث  
 (م ن) // (ب ح)  
 لنبرهن أن :  $\frac{\overline{ب م}}{\overline{أ ب}} = \frac{\overline{ب ن}}{\overline{أ ح}} = \frac{\overline{أ م}}{\overline{أ ح}}$  .



الشكل 16

البرهان :

لكي نبرهن على المطلوب  
يكفي أن نرسم من  
إحدى النقطتين م أو هـ  
الموازي لحامل الضلع الذي  
يشمل النقطة الأخرى .

في الشكل 16 المستقيم الذي يشمل م ويوازي (أج) يقطع (بج) في النقطة هـ .  
في المثلث أ ب ج : لدينا (م هـ) // (ب ج)

$$\text{إذن } \frac{أ م}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ ج} \dots\dots (1) \text{ (حسب نظرية طالس)}$$

وأيضاً في المثلث أ ب ج : لدينا (م هـ) // (أ ج)

$$\text{إذن } \frac{أ م}{أ ب} = \frac{هـ ج}{ب ج} \dots\dots (2)$$

$$\text{من (1) ، (2) نستنتج أن } \frac{أ م}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ ج} = \frac{هـ ج}{ب ج}$$

لكن الرباعي م هـ ج هـ متوازي أضلاع لأن (م هـ) // (ج هـ) ،  
و (م هـ) // (ج هـ) ، فيكون ج هـ = م هـ

$$\text{إذن } \frac{أ م}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ ج} = \frac{م هـ}{ب ج}$$

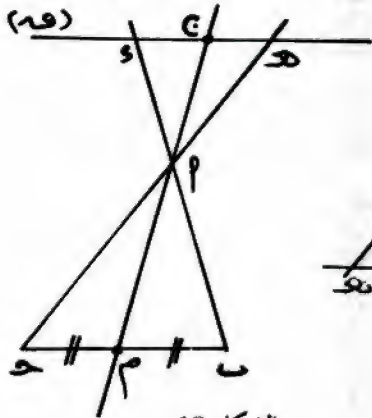
نتيجة :

أ م ح مثلث .  
 إذا كانت م نقطة من (أ ب) وكانت د نقطة من (أ ح) بحيث  

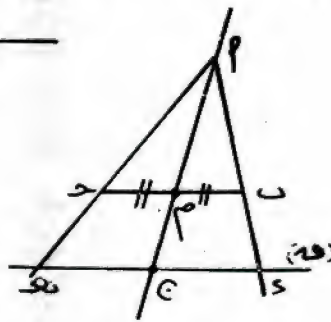
$$\frac{د م}{د ح} = \frac{أ د}{أ ح} = \frac{أ م}{أ ب}$$
 فإن (د م) // (د ح) .

مسألة 3 :

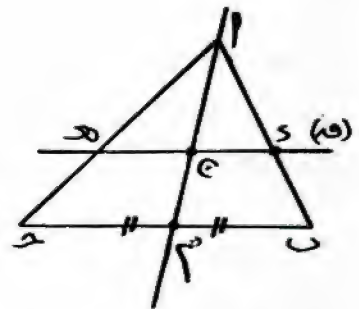
أ م ح مثلث : م منتصف [أ ح] . (د) مستقيم يوازي (ب ح) ويقطع  
 (أ ب) و (أ ح) في النقطتين د . هـ . (الأشكال 17 . 18 . 19)



الشكل 19



الشكل 18



الشكل 17

لنبرهن أن (أ م) متوسط للمثلث أ د هـ .

البرهان :

نضع (أ م) [د هـ] - 1  
 بتطبيق نتيجة المسألة 2 على كل من المثلثين أ م م . أ م ح حيث  
 (د م) // (د ح) و (م م) و (د م) // (د ح) نجد أن :

$$\frac{أ د}{أ م} = \frac{أ د}{أ م} = \frac{أ د}{أ م} \text{ و } \frac{د م}{د ح} = \frac{أ د}{أ ح} = \frac{أ م}{أ ب}$$



$$\frac{د ه}{م ح} = \frac{د ه}{م ح} \text{ نستنتج أن}$$

$$\frac{د ه}{م ح} = \frac{د ه}{م ح} \text{ ومنه}$$

$$\text{لكن } 1 = \frac{م ح}{م ح} \text{ لأن م منتصف [ب ح]}$$

$$\text{فيكون } 1 = \frac{د ه}{د ه} \text{ وهذا يعني أن د منتصف [ز ه]}$$

أي أن (أ د) متوسط للمثلث أ د ه.

ومنه (أ م) متوسط للمثلث أ د ه.

نتيجة :

أ ب ح مثلث ، م منتصف [ب ح] .  
إذا كان (ق) مستقيماً يوازي (ب ح) ويقطع (أ ب) و (أ ح) في  
النقطتين د ، ه على الترتيب فإن المتوسط (أ م) للمثلث أ ب ح هو  
أيضاً متوسط للمثلث أ د ه .

(2) خواص المنصفات في مثلث :

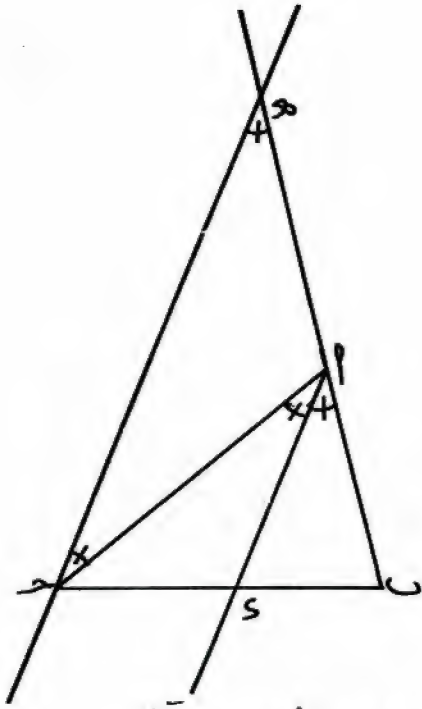
مسألة 1 :

أ ب ح مثلث ، المنصف [أ س] للزاوية [أ ب ، أ ح] يقطع [ب ح] في  
النقطة د .

$$\frac{أ ب}{أ ح} = \frac{د ب}{د ح} \text{ لنبرهن أن}$$



البرهان :



الشكل 20

نرسم المستقيم الذي يوازي  
(ا) ويشمل ح ، فيقطع (ا) في  
النقطة ه . (الشكل 20) .

وبتطبيق نظرية طالس

على المثلث ب ح ه نجد :

$$\frac{ب ا}{ا ه} = \frac{د ب}{ب ح}$$

$$\frac{ب ا}{ا ه} = \frac{د ب}{ب ح}$$

لاحظ أنه لكي نحصل على التناسب المطلوب

يكفي أن نبين أن  $ا ه = ا ح$  .

لدينا (ا) // (ه) .

وبما أن (ب ه) قاطع للمستقيمين المتوازيين (ا) ، (ه) فإن الزاويتين

المتماثلتين [ا ب ، ا د] و [ه ا ، ه ح] متقايستان أي  $ب ا د = ا ه ح$  .

وبما أن (ا) أيضا قاطع لهما فإن :

$$ا ح ه = ا ه ح \text{ (بالتبادل الداخلي)}$$

ونعلم أن  $ب ا د = ا ه ح$  (لأن [ا ب ، ا د] منصف [ا ح ، ا ح])

$$ا ح ه = ا ه ح$$

فالمثلث ا ه ح متساوي الساقين أي  $ا ه = ا ح$

$$\frac{ب ا}{ا ه} = \frac{د ب}{ب ح} \text{ فإن } \frac{ب ا}{ا ه} = \frac{د ب}{ب ح}$$

نظرية :

أ ب ح مثلث .  
إذا كان المنصف الداخلي لزاوية الرأس أ يقطع [ ب ح ] في النقطة د ، فإن :

$$\frac{ب د}{د ح} = \frac{أ ب}{أ ح}$$

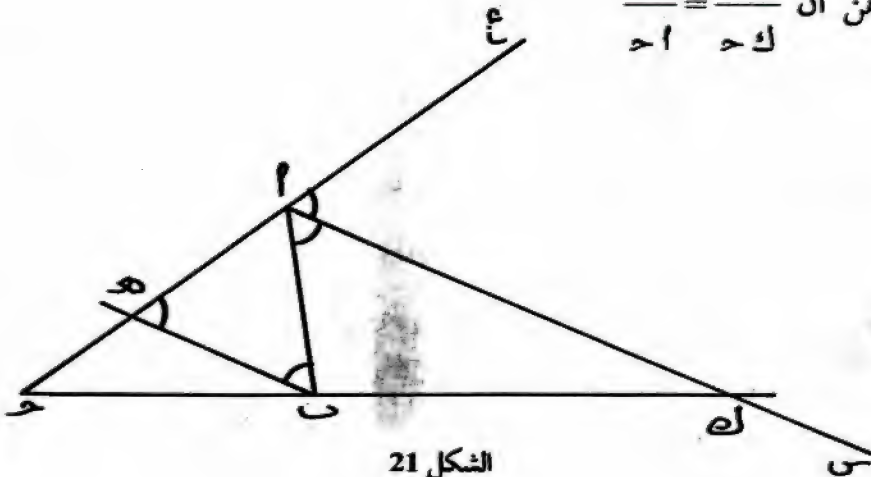
نقبل النظرية العكسية الآتية

أ ب ح مثلث .  
إذا كانت د نقطة من [ ب ح ] بحيث  $\frac{ب د}{د ح} = \frac{أ ب}{أ ح}$  ، فإن  
[ أ د ] منصف داخلي لزاوية الرأس أ .

مسألة 2 :

أ ب ح مثلث المنصف [ أ س ] للزاوية الخارجية [ أ ب ، أ ح ] يقطع ( ب ح ) في النقطة ك ( الشكل 21 ) .

لنبرهن أن  $\frac{ب ك}{ك ح} = \frac{أ ب}{أ ح}$



الشكل 21

البرهان :

• نفرض أن  $\angle A < \angle B$  ، ونرسم من  $B$  المستقيم الذي يوازي  $(A)$  فيقطع  $(A)$  في النقطة  $H$  .

بتطبيق نظرية طالس على المثلث  $KAB$  ، حيث  $(B) \parallel (K)$  نجد أن :

$$\frac{KB}{KA} = \frac{BH}{KH} \text{ أو } \frac{KB}{KA} = \frac{BH}{KH} \dots\dots (1)$$

لاحظ أنه لكي نحصل على التناسب المطلوب ؛  $\frac{KB}{KA} = \frac{BH}{KH}$  ؛

يجب أن نبرهن أن :  $\angle A = \angle H$  .

بما أن  $(AB)$  قاطع للمستقيمين المتوازيين  $(A)$  ،  $(B)$  ؛

فإن  $\angle A = \angle H$  (بالتبادل الداخلي) .

وبما أن  $(AC)$  أيضا قاطع لها

فإن  $\angle C = \angle K$  (بالتماثل) .

وبما أن  $\angle C = \angle K$  (لأن  $[AC]$  منصف)

فإن  $\angle A = \angle H$  فالمثلث  $ABH$  متساوي الساقين

ومنه  $\angle A = \angle H \dots\dots (2)$

من (1) ، (2) نستنتج أن  $\frac{KB}{KA} = \frac{BH}{KH}$  .

نظرية :

$AB \parallel AC$  مثلث .

إذا كان المنصف الخارجي لزاوية الرأس  $A$  يقطع  $(B)$  في النقطة  $K$

$$\text{فإن : } \frac{KB}{KA} = \frac{BH}{KH}$$



## نقبل النظرية العكسية الآتية

أ ب ح مثلث .

إذا كانت ك نقطة من (ب ح) ولا تنتمي إلى [ب ح] بحيث

$$\frac{ك ب}{ك ح} = \frac{أ ب}{أ ح} ، فإن [أ ك] منتصف خارجي لزاوية الرأس أ .$$

### مسألة محلولة

أ ب ح د شبه منحرف قاعدتاه [أ ب] و [ح د] ؛ (ق) مستقيم يوازي (أ ب) ويقطع [أ د] و [ب ح] في النقطتين ل ، ه ، ويقطع القطرين [أ ح] و [ب د] في النقطتين م ، ن .

$$(1) \text{ قارن بين النسبتين } \frac{ل م}{م ن} \text{ و } \frac{أ ل}{أ د} \text{ ثم بين النسبتين } \frac{ن ه}{ه د} \text{ و } \frac{ب ه}{ب ح} .$$

(2) استنتج أن ل م = ن ه .

(3) م هي نقطة تقاطع القطرين [أ ح] و [ب د] ، المستقيم الذي يشمل م ويوازي (ح د) يقطع [أ د] و [ب ح] في النقطتين ف ، ك .

برهن أن النقطة م هي منتصف القطعة [ف ك] .

(4) ط هي منتصف [أ ب] ، ط' هي منتصف [د ح] .

برهن أن النقط ط ، م ، ط' على استقامة واحدة .

المعطيات :

$$(أ ب) // (ح د) ؛ [أ ح] \cap [ب د] = \{م\} ؛$$

$$(ق) // (أ ب) ؛ (ف ك) // (ح د) ؛$$

$$ط' د = ط' ح ؛ ط أ = ط ب .$$



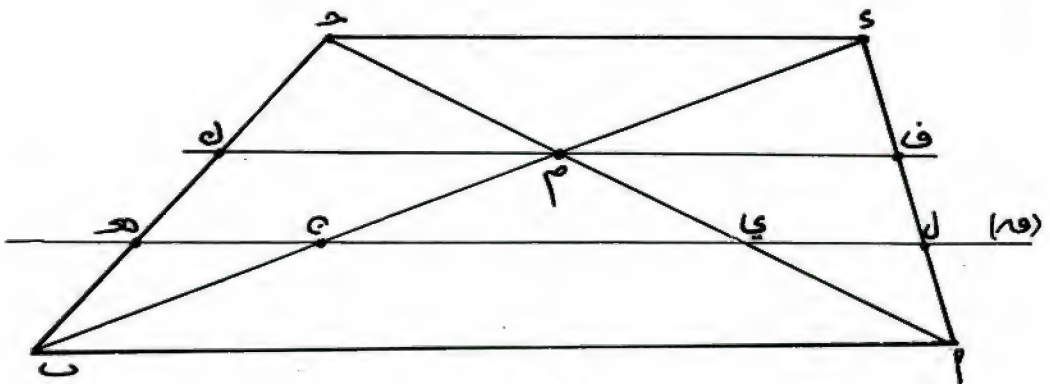
المطلوب :

(1) مقارنة النسبتين  $\frac{ل ح}{و ح}$  و  $\frac{أ ل}{أ و}$  ثم مقارنة النسبتين  $\frac{و ح}{أ و}$  و  $\frac{ب ح}{ب و}$ .

(2) إثبات أن  $ل ح = و ح$ .

(3) إثبات أن م منتصف [فك].

(4) إثبات أن النقط ط' ، م ، ط على استقامة واحدة.



الشكل 22

البرهان :

(1) • في المثلث أ و ح لدينا (ل ح) // (و ح)

إذن  $\frac{ل ح}{و ح} = \frac{أ ل}{أ و} = \frac{أ ح}{أ و}$  (نتيجة من نظرية طالس).

نستنتج أن  $\frac{ل ح}{و ح} = \frac{أ ل}{أ و}$

• في المثلث ب و ح لدينا (و ح) // (و ح)

إذن  $\frac{و ح}{أ و} = \frac{ب و}{ب و} = \frac{ب ح}{ب و}$  (نتيجة من نظرية طالس).

نستنتج أن  $\frac{و ح}{أ و} = \frac{ب و}{ب و}$

(2) المستقيمت (أ ب) و (ل هـ) و (ز ح) متوازية ،  
و (أ ز) و (ب ح) قاطعان لها .

$$\text{ف لدينا حسب نظرية طالس : } \frac{أ ب}{أ ز} = \frac{ب ح}{ح ز}$$

ومما سبق لدينا :

$$\frac{أ ل}{أ ز} = \frac{ب ح}{ح ز} , \quad \frac{أ ل}{أ ز} = \frac{ب ح}{ح ز}$$

$$\text{نستنتج أن } \frac{أ ل}{أ ز} = \frac{ب ح}{ح ز}$$

نلاحظ أن لهاتين النسبتين المتساويتين نفس المقام فيسطاهما متساويان .

$$\boxed{\frac{أ ل}{أ ز} = \frac{ب ح}{ح ز}}$$

(3) في المثلث أ ب ح لدينا (ف م) // (ز ح) .

$$\text{إذن } \frac{أ ف}{أ ز} = \frac{أ م}{أ ح} = \frac{ف م}{ح ز} \quad (\text{نتيجة من نظرية طالس})$$

$$\text{نستنتج أن } \boxed{\frac{أ ف}{أ ز} = \frac{ف م}{ح ز}} \quad (1) \dots\dots$$

وفي المثلث ب ز ح لدينا (م ك) // (ز ح)

$$\text{إذن } \frac{ب م}{ب ز} = \frac{ب ك}{ب ح} = \frac{م ك}{ح ز} \quad (\text{نتيجة من نظرية طالس})$$

$$\text{ومنه } \boxed{\frac{ب م}{ب ز} = \frac{م ك}{ح ز}} \quad (2) \dots\dots$$

ولكن المستقيمت (ز ح) و (ف ك) و (أ ب) متوازية والمستقيمتان (أ ز) و (ب ح) قاطعان لها .

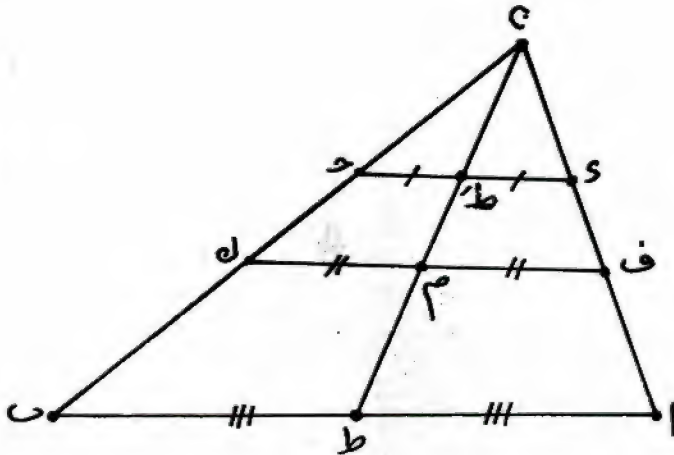
$$\text{إذن } \boxed{\frac{أ ف}{أ ز} = \frac{ب ك}{ب ح}} \quad (3) \dots\dots (\text{حسب نظرية طالس})$$

من (1) ، (2) ، (3) نستنتج أن  $\frac{ف م}{س م} = \frac{ك م}{س ح}$

ومنه  $ف م = م ك$  .

وبما أن النقط  $ف$  ،  $م$  ،  $ك$  على استقامة واحدة ، فالنقطة  $م$  هي منتصف  $[ف ك]$  .

(4) نضع  $(س ا) \cap (م ح) = (م)$  (الشكل 23) .



الشكل 23

• في المثلث  $ك ف ك$  لدينا  $(س ح) // (ف ك)$  و  $(م م)$  متوسط له ،

فالنقطة  $ط'$  التي هي منتصف  $[س ح]$  تنتمي إلى  $(م م)$  ،

هذا يعني أن النقط  $م$  ،  $ط'$  ،  $م$  على استقامة واحدة .

• وفي المثلث  $م ا ب$  لدينا  $(ف ك) // (ا ب)$  و  $(م ط)$  متوسط له ،

فالنقطة  $م$  التي هي منتصف  $[ف ك]$  تنتمي إلى  $(م ط)$  .

وهذا يعني أن  $م$  ،  $ط$  ،  $م$  على استقامة واحدة .

نستنتج من ذلك أن النقط  $ط'$  ،  $م$  ،  $ط$  على استقامة واحدة

## تمارين

1. (ق) ، (ق') مستقيمان متقاطعان في النقطة م ؛ ا ، ب نقطتان من (ق) ؛  
 (ل) مستقيم لا يوازي (ق) ولا (ق') ؛  
 ا' ، ب' هما مسقطا ا ، ب على (ق') وفق (ا ب) على الترتيب .  

$$(1) \text{ برهن أن } \frac{\overline{ا' م}}{\overline{ب' م}} = \frac{\overline{ا م}}{\overline{ب م}}$$
- (2) المستقيم الذي يشمل ب' ويوازي (ا' ب) يقطع (ق) في النقطة ح . قارن بين  $\frac{\overline{ا م}}{\overline{ب م}}$  و  $\frac{\overline{ب م}}{\overline{ح م}}$  ثم استنتج أن  $\overline{ب م}^2 = \overline{ا م} \times \overline{ح م}$  .
2. [م س] ، [م ع] ، [م ص] ثلاثة أنصاف مستقيمت ، ا ، ب نقطتان من [م س] ،  
 ب نقطة من [م ع] ، ح نقطة من [م ص] ، د' هي مسقط د على [م ع] وفق (ا ب) .  
 د" هي مسقط د' على [م ص] وفق (ب ح) .  
 - برهن أن (ا ح) // (د د") .
3. ا ب ح مثلث ، ا' منتصف [ب ح] ، المستقيم (ق) الذي يشمل ا' ويوازي (ا ب)  
 يقطع (ا ح) في د ، والمستقيم (ق') الذي يشمل ا ويوازي (ب ح) يقطع (ق) في ه .  
 (1) برهن أن د منتصف [ا ح] .  
 (2) برهن أن د منتصف [ا' ه] .
4. ا ب ح مثلث ، م نقطة من [ب ح] ؛ المستقيم الذي يشمل م ويوازي (ا ح) يقطع  
 (ا ب) في د والمستقيم الذي يشمل م ويوازي (ا ب) يقطع (ا ح) في ه .  
 (1) قارن بين  $\frac{\overline{ا د}}{\overline{ا ب}}$  و  $\frac{\overline{م ح}}{\overline{ب ح}}$  ثم بين أن :  $\frac{\overline{ا د}}{\overline{ا ب}} = \frac{\overline{م ح}}{\overline{ب ح}}$  .  
 (2) ما هو وضع النقطة م على القطعة [ب ح] لكي يكون (د ه) // (ب ح) .



5.  $AB \sim A'B'$  ،  $B'$  منتصف  $[AC]$  ،  $D$  نقطة من  $[AB]$  بحيث  $BD = \frac{1}{3} AB$  .

(ق) مستقيم يشمل  $D$  ويوازي  $(AC)$  ويقطع  $(AB)$  في  $H$  ؛ (ق) مستقيم يشمل  $D$  ويوازي  $(AB)$  ويقطع  $(AC)$  في  $E$  .

$$(1) \text{ احسب كلاً من النسبتين } \frac{AE}{AC} , \frac{AH}{AB}$$

(2) برهن أن  $(DE) \parallel (BC)$  .

6.  $AB \sim A'B'$  ،  $B'$  هو المسقط العمودي للنقطة  $B$  على  $(AC)$  و  $C'$  هو المسقط العمودي للنقطة  $C$  على  $(AB)$  ،  $D$  هو المسقط العمودي للنقطة  $B'$  على  $(AB)$  ، والمسقط العمودي للنقطة  $C'$  على  $(AC)$  هو النقطة  $H$  .

$$(1) \text{ قارن بين } \frac{AD}{AC} \text{ و } \frac{AB'}{AB} \text{ ثم بين } \frac{AH}{AB} \text{ و } \frac{AC'}{AC}$$

$$(2) \text{ بين أن } AD \times AC = AB' \times AB = AH \times AC$$

(3) برهن أن  $(DE) \parallel (BC)$  .

7. وحدة الطول هي السنتيمتر.

$AB \sim A'B'$  حيث  $AB = 7,2$  ،  $AC = 9$  ؛  $D$  نقطة من  $[AB]$  بحيث  $AD = 2,4$

$H$  نقطة من  $[AC]$  بحيث  $AH = 3$  .

برهن أن  $(DH) \parallel (BC)$  .

8. وحدة الطول هي السنتيمتر.

$AB \sim A'B'$  شبه منحرف قاعدتاه  $[AB]$  و  $[A'B']$  ، (ق) مستقيم يوازي كلاً من  $(AB)$  و  $(A'B')$  ويقطع  $[AD]$  و  $[BC]$  في النقطتين  $M$  ،  $N$  على الترتيب ، إذا كان

$$AM = 25 , BN = 100 , AN = 20$$

احسب  $AD$  ،  $BC$  .

9.  $AB \sim A'B'$  شبه منحرف قاعدتاه  $[AB]$  و  $[A'B']$  ؛  $M$  منتصف  $[AD]$  ؛ (ق) مستقيم يشمل  $M$  ويوازي كلاً من  $(AB)$  و  $(A'B')$  ويقطع  $[BC]$  و  $[A'B']$  في النقطتين  $N$  ،  $H$  على الترتيب .

برهن أن :

(1) د منتصف [ب ح] وأن ه منتصف [ب د] .

$$(2) م د = \frac{1}{2} (أ ب + ح د) .$$

10. أ ب ح د رباعي م نقطة من [ب د] ، المستقيم الذي يشمل م ويوازي (د ح) يقطع [ب ح] في ه ؛ المستقيم الذي يشمل م ويوازي (أ د) يقطع [أ ب] في ه .  
- برهن أن (أ ح) // (ه د) .

11. أ ب ح د متوازي أضلاع ؛ قطراه [أ ح] و [ب د] متقاطعان في نقطة م ؛ ه ، ف نقطتان من [أ ح] بحيث أ ه = ه ف = ف ح .

(1) بين أن م منتصف [ه ف] .

(2) بين أن الرباعي ب ف د ه متوازي أضلاع .

(3) المستقيمان (د ح) و (ب ف) متقاطعان في و ، والمستقيمان (أ ب) و (د ه) متقاطعان في ك ، بين أن و ، ك منتصفا [ح د] ، [أ ب] على الترتيب .

(4) برهن أن النقط و ، م ، ك على استقامة واحدة .

12. أ ب ح د متوازي أضلاع ، م منتصف [أ ب] ، د منتصف [ح د] ، المستقيمان (د م) ، (ب د) يقطعان القطر [أ ح] في ل و ك على الترتيب .

- برهن أن أ ل = ل ك = ك ح .

13. أ ب ح مثلث ، (و) مستقيم يقطع (ب ح) ، (أ ح) ، (أ ب) في النقط ف ، ه ، ك على الترتيب ؛ المستقيم الذي يوازي (ف ك) ويشمل أ يقطع (ب ح) في د .

$$(1) \text{ بين أن } \frac{أ ه}{ه ب} = \frac{أ ف}{ف ب} \text{ وأن } \frac{أ ك}{ك ب} = \frac{أ د}{د ب} .$$

$$(2) \text{ استنتج أن } \frac{أ ه}{ه ب} \times \frac{أ د}{د ب} = \frac{أ ف}{ف ب} .$$

$$(3) \text{ بين أن } 1 = \frac{أ ه}{ه ب} \times \frac{أ د}{د ب} \times \frac{أ ف}{ف ب} .$$

14.  $AB \perp$  مثلث  $F$ ،  $H$ ،  $K$  ثلاثة نقط بـ  $AB \perp$  (  $AB$  ) ،

$$H \perp (AB) ، K \perp (AB) \text{ و } \frac{FK}{AH} \times \frac{FH}{AK} \times \frac{AH}{FK} = 1 .$$

المستقيم (  $F$  ) يقطع المستقيم (  $AB$  ) في  $K$  .  
باستعمال نتائج التمرين السابق بين أن  $K = K$  . استنتج أن النقط  $F$  ،  $H$  ،  $K$  على استقامة واحدة .

15. وحدة الطول هي السنتيمتر .

$AB \perp$  مثلث ، حيث  $AB = 10$  ،  $D$  و  $H$  نقطتان من  $[AB]$  بحيث  
 $AD = DH = 2$  ،  $E$  نقطة من  $[AB]$  و  $K$  نقطة من  $[AH]$  بحيث  
 $(EK) \parallel (AB)$  و  $(EH) \parallel (AD)$  ،  $(EK) \cap (EH) = \{E\}$  و  
 $(AE) \cap (AB) = \{E\}$  .

$$(1) \text{ قارن بين النسب } \frac{AE}{AD} \text{ و } \frac{ED}{AB} \text{ و } \frac{AD}{AE} .$$

(2) بين أن  $M$  منتصف  $[EH]$  .

$$(3) \text{ قارن بين } \frac{EK}{EH} \text{ و } \frac{ED}{EH} \text{ ثم بين } \frac{EK}{EH} \text{ و } \frac{ED}{EH} .$$

(4) بين أن  $(EK) \parallel (AB)$  .

(5) كيف يجب أن يكون نوع المثلث  $AB \perp$  حتى يكون الرباعي  $ADEK$  مستطيلاً؟ معيّنًا؟ مربعًا؟

16. وحدة الطول هي المليمتر .

$[AB]$  قطعة مستقيمة حيث  $AB = 60$

$$(1) \text{ نقطة من } [AB] \text{ بحيث } E \text{ تقسم } [AB] \text{ بالنسبة } \frac{5}{7} .$$

احسب  $EA$  ،  $EB$  .

(2) د' نقطة من (أب) بحيث د' لا تنتمي إلى [أب] و د' تقسم القطعة  
[أب] بالنسبة  $\frac{5}{7}$ .

احسب د'أ ، د'ب ، د'د' .  
(3) قارن بين النسبتين  $\frac{أد'}{د'ب}$  و  $\frac{أد'}{د'د'}$ .

17. (م ، و) معلم للمستوي ؛ أ ، ب نقطتان فاصلتهما -2 ، +8 على الترتيب بالنسبة  
إلى هذا المعلم ، ح منتصف القطعة [أب] ؛ د' ، د'' نقطتان بحيث

$$\frac{أد'}{د'ب} = \frac{أد''}{د''ب} = \frac{2}{3}$$

(1) احسب د'أ ، د'ب ، د'أ ، د'ب .

(2) عيّن فواصل النقط ح ، د' ، د'' .

(3) تحقق من صحة المساواتين

$$\frac{1}{أد'} + \frac{1}{أد''} = \frac{2}{أب} ، \overline{أد'} \times \overline{أد''} = \overline{أب}^2$$

18. أب ح مثلث ؛ ل نقطة تقسم [أب] بالنسبة  $\frac{1}{3}$  ،

د نقطة تقسم [أح] بالنسبة  $\frac{1}{2}$  ، (ب د) يقطع (ح ل) في م .

(أ م) يقطع [ب ح] في ه' ؛ ز هو مسقط أ على (ب ح) وفق (ب د) ، ف هو  
مسقط أ على (ب ح) وفق (ح ل) .

(1) برهن أن  $\overrightarrow{أد} = \overrightarrow{أز} + \overrightarrow{أه}$  .

(2) ما هي العلاقة بين  $\overrightarrow{أه}$  و  $\overrightarrow{أز}$  وبين  $\overrightarrow{أد}$  و  $\overrightarrow{أه}$  ؟

(3) نضع  $\frac{أه}{أد} = س$  . احسب كلاً من  $\frac{أه}{أد}$  و  $\frac{أز}{أد}$  .

(4) بين أن  $\overrightarrow{أد} = 3\overrightarrow{أه} + \overrightarrow{أز}$  .



19. وحدة الطول هي السنتيمتر.

أ ب ح مثلث محيطه 11,5 .

المنصف الداخلي للزاوية الرأس أ يقطع (ب ح) في النقطة د

بحيث د ب = 3 ، د ح = 1,6 .

احسب أ ب ، أ ح .

20. وحدة الطول هي السنتيمتر.

أ ب ح مثلث حيث ب ح = 18 ، أ ح = 21 ، أ ب = 15 ،

المنصف الداخلي للزاوية التي رأسها أ ، يقطع المستقيم (ب ح) في د ، والمنصف

الخارجي للزاوية التي رأسها أ يقطع المستقيم (ب ح) في د' .

(1) احسب د ب ، د ح ، د' ب ، د' ح ، د د' .

$$(2) \text{ يبين أن } \frac{2}{\frac{1}{د د'}} = \frac{1}{\frac{1}{د' ح}} - \frac{1}{\frac{1}{د ب}} = \frac{1}{د ح} + \frac{1}{د ب}$$

## طالس

فيلسوف ورياضي إغريقي عاش بين القرنين 7 ، 6 قبل الميلاد ، يُقال إنه فكر في قياس الزمن ، وأنه تنبأ بالكسوف الذي وقع عام 585 قبل الميلاد ، وأنشأ جداول زمنية مزودة بتوضيحات فلكية :  
وتعزى إلى طالس النتائج الآتية :

- الزاوية المحيطية في نصف دائرة هي زاوية قائمة .
- الزاويتان المتقابلتان بالرأس متقايستان .
- الحالة الأولى من حالات تقايس المثلثات .

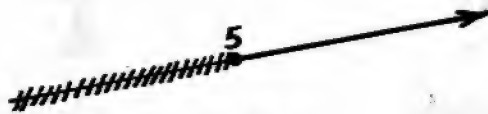
أما نظرية المستقيمت المتوازية المقطوعة بقاطعين ، والمقرونة باسمه ، فيقال إنها كانت معروفة عند المصريين والبابليين قبله .

## المتراجحات وجمل المتراجحات من الدرجة الأولى في ج .

### 1. المجالات في ج :

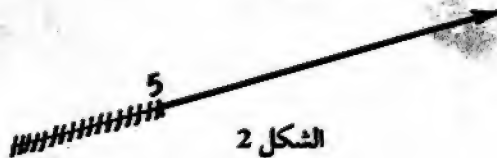
مثال 1 :

تعلم أن :  $(س < 5)$  معناه  $(س - 5 < 0)$  .  
 • المجموعة  $\{س / س \geq 5 \text{ و } س < 5\}$  هي جزء من ج ونسميها  
 المجال المفتوح  $5$  ، زائد لا نهاية ، ونرمز له بالرمز  $]5, +\infty[$



الشكل 1

هذا المجال محدود بالعدد 5 لكنه لا يشمل 5 ، أي  $5 \notin ]5, +\infty[$  .  
 $س \geq 5$  ، معناه  $س < 5$  .  
 - الجزء الملون في الشكل 1 يمثل المجال  $]5, +\infty[$  .  
 • المجموعة  $\{س / س \geq 5 \text{ و } س \leq 5\}$  تكتب على الشكل  $]5, +\infty[$   
 وتسمى المجال المغلق من جهة 5 .  
 $س \geq 5$  ، معناه  $س \leq 5$  .  
 - الجزء الملون في الشكل 2 يمثل المجال  $]5, +\infty[$   
 هذا المجال محدود بالعدد 5 ويشمل 5 .



الشكل 2

مثال 2 :

نعلم أن  $\left( \frac{3}{2} - \leq s \leq 4 \right)$  معناه  $\left( \frac{3}{2} - \leq s \leq 4 \right)$ .

المجموعة  $\left\{ s / s \geq \frac{3}{2} \text{ و } s \leq 4 \right\}$  تكتب على الشكل :

$$\left[ \frac{3}{2}, 4 \right] \text{ وتسمى « المجال المغلق » و } \frac{3}{2} \text{ و } 4$$

العددان  $\frac{3}{2}$  ، 4 هما حدّا هذا المجال .



الشكل 3

الجزء الملوّن في ( الشكل 3 ) يمثّل المجال المغلق  $\left[ \frac{3}{2}, 4 \right]$ .

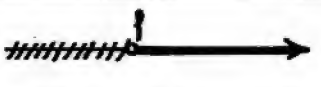

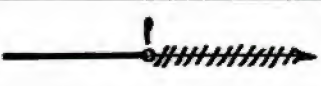
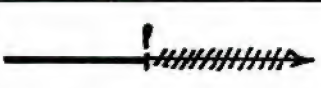




$$s \in \left[ \frac{3}{2}, 4 \right] \text{ معناه } \frac{3}{2} \leq s \leq 4$$





بصفة عامة :

ا، ب عدنان حقيقيان حيث  $a \geq b$ .

	$] \infty + , a [$	$s < a$
	$] \infty + , a ]$	$s \leq a$
	$] a , -\infty [$	$s > a$
	$] a , -\infty [$	$s \geq a$
	$] \infty + , a [$	$a \geq s \geq b$ (س محصور بين ا، ب)
	$] \infty + , a [$	$a > s \geq b$ (س محصور بين ا، ب)
	$] \infty + , a [$	$a \geq s > b$ (س محصور بين ا، ب)
	$] \infty + , a [$	$a > s > b$ (س محصور بين ا، ب)

ملاحظات :

1) لكتابة المجال  $] a , b [$  نشترط أن يكون  $a > b$ .

- إذا كان  $a < b$  فالكتابة  $[a, b]$  ليس لها معنى .  
 مثلاً الكتابة  $[3, -5]$  ليس لها معنى لأن 3 ليس أصغر من  $(-5)$  .  
 (2) إذا كان  $a = b$  فإن  $[a, b] = [a, a] = \{a\}$   
 (3) تمثيل مجال على محور الأعداد الحقيقية نشطب على جزء المستقيم غير المناسب ونضع دُويرة للحد المستثنى من المجال .  
 (4) كل مجال من  $\mathbb{R}$  حداه مختلفان هو مجموعة غير منتهية .  
 (5)  $[-\infty, 0] \cup ]0, +\infty[ = \mathbb{R}$  ونعلم أن  $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$  .  
 إذن  $\mathbb{R} = [-\infty, 0] \cup ]0, +\infty[$  .  
 نستخدم على الكتابة :  $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty[$  .

2. مفهوم المتراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد في  $\mathbb{R}$  :  
 مسألة :

- تا و ها تطبيقان من  $\mathbb{R}$  إلى  $\mathbb{R}$  حيث :  
 تا  $(s) = 5 - s$  ؛ ها  $(s) = 2 + s$  .  
 • أكمل الجدول الآتي بحساب بعض القيم العددية للتطبيقين تا ، ها ثم استنتج  
 القيم العددية للمتغير  $s$  التي من أجلها يكون : تا  $(s) >$  ها  $(s)$

س	4 -	$\frac{7}{2}$ -	$\frac{2}{5}$	1	2	2,5	3	3,5	4	5
تا (س)	22 -	$\frac{39}{2}$ -	0	..	8	10,5	13	...	18	..
ها (س)	1 -	0	$\frac{39}{5}$	9	11	12	13	...	15	..

لاحظ ما يلي :

(1) من أجل  $s = 3$  يكون  $\text{تا}(s) = \text{ها}(s)$

$$\text{أي } 5 - s = 2 - s + 7$$

نعلم أن  $5 - s = 2 - s + 7$  هي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهول  $s$  ومجموعة حلولها هي  $\{3\}$ .

(2) من أجل كل عدد حقيقي  $s$  بحيث  $s > 3$  يكون

$$\text{تا}(s) > \text{ها}(s) \text{ أي } 5 - s > 2 - s + 7.$$

ومن أجل كل عدد حقيقي  $s$  بحيث  $s < 3$  يكون :

$$\text{تا}(s) < \text{ها}(s) \text{ أي } 5 - s < 2 - s + 7.$$

كل من  $(5 - s > 2 - s + 7)$  و  $(5 - s < 2 - s + 7)$  تسمى متراجحة من الدرجة الأولى بالمجهول  $s$ .

• كل عدد حقيقي يحقق متراجحة يسمى حلاً لها.

$$\text{مثلاً } \frac{2}{5} \text{ هو حل للمتراجحة } 5 - s > 2 - s + 7.$$

و 4 ليس حلاً لها.

**حل متراجحة هو إيجاد مجموعة حلولها.**

نبين فيما بعد أن مجموعة حلول المتراجحة  $5 - s > 2 - s + 7$  هي المجموعة  $\{s / s \geq 3 \text{ و } s > 3\}$  أي المجال  $[-\infty, 3]$ .

أمثلة :

$$\text{كل من } 5 - s \geq 2 - s + 7, 5 - s \leq 2 - s + 7, \frac{s + \sqrt{2}}{2} < 5,$$

$$\frac{3 + s}{4} - 2 > 0 \text{ هي متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد في } s.$$

$$5س + 1 > 3س ، \frac{5}{2س} > 9س - 1 ، س - 3س > 0 \text{ هي}$$

متراجحات لكنها ليست من الدرجة الأولى .

### 3. حل المتراجحات من الدرجة الأولى في ج :

مثال 1 : لنحل في ج المتراجحة  $5س - 2 > 2س + 7$  ..... (1)  
أي لنبحث عن مجموعة حلولها .

الحل :

نعلم أن  $(5س - 2 > 2س + 7)$  معناه  $(5س - 2س > 7 + 2)$

لاحظ كيفية نقل الحدود من طرف إلى طرف آخر

$$7 + \textcircled{2س} > \textcircled{2س} - 5س$$

$$7 + \textcircled{2} > \textcircled{5س - 2س}$$

فنتحصل بذلك على المتراجحة  $9س > 9$

وهي متراجحة من الشكل  $اس > ب$  ، ونعلم أنه إذا كان

$اس > ب$  و  $ا' < 0$  فإن  $ا' (اس) > ا' ب$

إذن بضرب طرفي المتراجحة  $9س > 9$  في العدد الموجب  $\frac{1}{3}$  الذي هو مقلوب 3

نحصل على المتراجحة :

$$9 \times \frac{1}{3} > (3س) \frac{1}{3}$$

أي  $3س > 3$

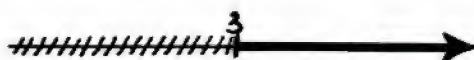


نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي  $\text{مج} = \{s / s \geq 3 \text{ و } s > 3\}$   
أي المجال  $\text{مج} = [3, \infty)$ .



الشكل 4

- الجزء المثلث في (الشكل 4) يمثل مجموعة الحلول .
- إن مجموعة حلول المتراجحة  $5 - s \geq 2 + s$  هي المجال  $[3, \infty)$  .
  - مجموعة حلول المتراجحة  $5 - s \leq 2 + s$  هي المجال  $[-3, \infty)$  .



الشكل 5

مثال 2 :

$$- \text{ لنحل في ع المتراجحة } \frac{3 + s}{2} < \frac{7 - s}{2} - 15.$$

$$\text{الحل : نعلم أن } \frac{3 + s}{2} < \frac{7 - s}{2} - 15.$$

$$\text{إذن المتراجحة } \frac{3 + s}{2} < \frac{7 - s}{2} - 15 \text{ تصبح على الشكل :}$$

$$15 - s < \frac{3 + s}{2} + \frac{7 - s}{2}$$

وبجعل الحدود التي فيها المتغير في طرف ، والحدود التي ليس فيها المتغير في الطرف الآخر مع تغيير إشارات الحدود المنقولة من طرف إلى آخر نجد :

$$15 - \frac{3}{2} - s < \frac{3}{2} - s - \frac{7}{2}$$

$$\frac{30 - 3 - s}{2} < \frac{3 - s - 7}{2}$$

$$\frac{33}{2} - s < 5 - s \quad \text{أي} \quad \frac{33}{2} - s < \frac{10}{2} - s$$

وهذه متراجحة من الشكل ١ س < ٥

ونعلم أنه إذا كان ١ س < ٥ و ٠ > ١ فإن ١ (١ س) > ١ س

إذن يضرب طرفي المتراجحة ٥ س <  $\frac{33}{2} - s$  في العدد السالب  $-\frac{1}{5}$  الذي هو

مقلوب ٥ - نحصل على المتراجحة

$$\left( \frac{33}{2} - s \right) \times \left( -\frac{1}{5} \right) > (5 - s) \times \left( -\frac{1}{5} \right)$$

$$\frac{33}{10} > 5 - s \quad \text{أي} \quad s > 3,3$$

نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة المفروضة هي المجال  $]-3,3, \infty[$ .



الشكل 6

الجزء الملوّن في (الشكل 6) يمثل مجموعة الحلول .

• مجموعة حلول المتراجحة  $\frac{3}{2} - s \geq \frac{3 + s - 7}{2}$  هي المجال  $]-\infty, 3,3]$ .

### مثال 3 :

لنبحث عن مجموعة حلول المتراجحة الآتية :

$$1 - \frac{7 + 6s}{8} > 5 - \frac{3}{4}s$$

الحل :  $\frac{8 - 7 + 6s}{8} > 5 - \frac{3}{4}s$  ..... (1)

$$\frac{1 - 6s}{8} > 5 - \frac{3}{4}s \quad \text{أي}$$

$$5 + \frac{1}{8} - > s - \frac{6}{8}s - \frac{3}{4}s \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{39}{8} > s - \frac{3}{4}s - \frac{3}{4}s$$

$$0 < s - \frac{39}{8}$$

نعلم أنه مهما يكن العدد الحقيقي  $s$  فإن  $0 < s$  .

وأن  $0 < \frac{39}{8}$  ، نستنتج أن مجموعة حلول المتراجحة (1) هي المجموعة  $s > 0$

المجال  $[-\infty, +\infty]$  .

### مثال 4 :

لنبحث عن مجموعة حلول المتراجحة الآتية :

$$\frac{1 - 3s}{4} < 5 - \frac{6}{8}s$$

$$\text{الحل : } \frac{1 - س 3}{4} < \frac{40 - س 6}{8}$$

$$\text{أي } \frac{2 - س 6}{8} < \frac{40 - س 6}{8} \text{ نضرب طرفي المتراجحة في العدد 8 نحصل على}$$

$$\text{المتراجحة : } 2 - س 6 < 40 - س 6$$

$$\text{ومنه } 40 + 2 - < س 6 - س 6$$

$$\text{أي } 0 < س 38$$

نعلم أنه مهما يكن العدد الحقيقي س فإن  $0 < س$

وأن  $0 < 38$  ، نستنتج أنه لا يوجد عدد حقيقي س بحيث  $0 < س < 38$  .

فمجموعة حلول هذه المتراجحة هي المجموعة الخالية  $\phi$  .

**4. جمل المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :**

**مثال 1 :**

لنبحث عن مجموعة الأعداد الحقيقية س التي تحقق في آن واحد المتراجحتين :

$$3 - س \geq 2 + س \text{ و } 1 + س \leq 2 - س$$

لنحل في ح كلاً من هاتين المتراجحتين :

$$\bullet \text{ نعلم أن } 3 - س \geq 2 + س \text{ تعني أن } 3 - س - س \geq 2 + 1$$

$$\text{أي } 2 - س \geq 3 \text{ ومنه } س \geq -\frac{3}{2}$$

فمجموعة حلول المتراجحة الأولى هي :

$$\text{مج}_1 = \left\{ س / س \geq -\frac{3}{2} \text{ و } س \leq 3 \right\}$$

$$\text{أي مج}_1 = \left[ -\frac{3}{2}, 3 \right]$$



• نعلم أن  $5 \leq 2 + s$  و  $2 \leq 3 - s$  تعني أن  $5 - s \leq 2 - 3 - s$   
أي  $3 \leq 5 - s$

$$\frac{5}{3} - s \leq 5 - s$$

فمجموعة حلول المتراجحة الثانية هي :

$$\text{مج}_2 = \left\{ s / s \geq \frac{5}{3} \text{ و } s \leq \frac{5}{3} - s \right\}$$

$$\text{أي مج}_2 = \left[ \frac{5}{3}, \infty \right)$$

• إن المجموعة مج التي نبحث عنها هي مجموعة الحلول المشتركة للمتراجحتين المفروضتين.

هذا يعني أن مج هي مجموعة الأعداد الحقيقية  $s$  بحيث

$$\left( s \leq \frac{5}{3} \right) \text{ و } \left( s \geq \frac{3}{2} \right) \text{ أي } \frac{3}{2} \leq s \leq \frac{5}{3}$$

$$\text{نستنتج أن مج} = \left\{ s / s \geq \frac{3}{2} \text{ و } s \leq \frac{5}{3} \right\}$$

$$\text{أي مج} = \left[ \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \right]$$

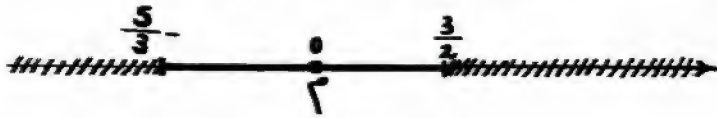
لاحظ أن  $\text{مج}_1 \cap \text{مج}_2$

$$\left[ \frac{3}{2}, \infty \right) \cap \left[ \frac{5}{3}, \infty \right) = \left[ \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \right] \text{ أي}$$

نقول إننا حللنا جملة المتراجحتين :

$$\left. \begin{aligned} 1 + s &\geq 2 - s \\ 5 + s &\leq 2 + s \end{aligned} \right\}$$

وأن مجموعة حلولها هي المجال  $\left[ \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \right]$



الشكل 7

مثال 2 :

لنحل في ح جملة المتراجحتين :

$$\left. \begin{array}{l} (1) \dots\dots 1 - س \geq 5 - س \frac{3}{4} \\ (2) \dots\dots \frac{3 - س}{7} > س \frac{9}{14} + \frac{9}{7} \end{array} \right\}$$

• لنحل المتراجحة  $1 - س \geq 5 - س \frac{3}{4}$  :

$$5 + 1 - \geq س \frac{3}{4} - س \frac{3}{4}$$

$$4 \geq س \frac{8}{4} - س \frac{3}{4}$$

$$4 \geq س \frac{11}{4} \quad \text{أي}$$

$$\frac{16}{11} \leq س$$

مجموعة حلول المتراجحة الأولى هي مج<sub>1</sub> =  $\left[ \frac{16}{11}, +\infty \right]$  .

## تمارين

1. أكمل ما يلي :

$$\{ \dots \} = [3 + , 2 - ] \text{ س / س } \geq \text{ و } \dots$$

$$\{ \dots \} = ]6 , 2,5 - [ \text{ س / س } \geq \text{ و } \dots$$

$$\{ \dots \} = ]1 , \infty - [ \text{ س / س } \geq \text{ و } \dots$$

$$\{ \dots \} = \left[ \infty + , \frac{1}{2} \right] \text{ س / س } \geq \text{ و } \dots$$

2. مثل كلاً من المجالات الآتية على محور الأعداد الحقيقية :

$$\frac{3}{4} , \infty - [ ; ] \infty + , 4 ; [5 , 0 [ ; ]0 , 2,5 - [ ; [1 , 1 - ]$$

3. اكتب كلاً من المجموعات الآتية على شكل مجال :

$$\{ \text{س / س } \geq 2 \text{ و } \text{س} > 3 \}$$

$$\{ \text{س / س } \geq 0 \}$$

$$\{ \text{س / س } \geq 2 \text{ و } \text{س} > 10 \times 3 - 10 \times 2 \}$$

$$\{ \text{س / س } \geq 2 \text{ و } \text{س} > \sqrt{3} \}$$

$$\{ \text{س / س } \geq 0 \}$$

$$\{ \text{س / س } \geq 3 \}$$

4. إليك المجالات الآتية :

$$[3 , 0] = \text{م} ; [1 , 0] = \text{ف} ; [2 , 3 - ] = \text{ل}$$

عين كلاً من :  $\text{م} \cap \text{ل}$  ;  $\text{م} \cup \text{ل}$  ;  $\text{ت}$  ، ثم اكتب هذه المجموعات بإعطاء خاصية مميزة لكل منها .

5. حل في  $\mathbb{R}$  كلاً من المتراجحات الآتية ثم مثل نياتياً في كل حالة مجموعة الحلول .

$$(1) \text{ س} - 5 \geq 7 - 3 \text{ س} ; (3) \text{ س} + 2 < 3 - \text{س} .$$

$$(2) \text{ س} + 5 < 1 . (4) \text{ س} - \frac{\text{س}}{5} \geq 3 - 4 .$$

6. نفس السؤال بالنسبة إلى المتراجحات الآتية :

$$(1) \quad 5s + 2 > (3s + 5) - 4s + 7$$

$$(2) \quad \frac{15s + 8}{2} \leq 9 + (2 - s)8$$

$$(3) \quad \frac{5}{3} + \frac{1}{2}s \geq \frac{1}{2} - s - \frac{3}{4}$$

$$(4) \quad 2\sqrt{s} \geq 1 - 3\sqrt{s}$$

$$(5) \quad \frac{3}{5} + \frac{s}{2} \leq 2\sqrt{s} - 4$$

$$(6) \quad 1,4 + s,2 > 2,6 - s,8$$

7. نفس السؤال بالنسبة للمتراجحات الآتية :

$$(1) \quad \frac{5 + s}{4} \geq \frac{3 + s}{5} - \frac{2 + s}{2}$$

$$(2) \quad \frac{7}{2} + s > \frac{14}{2} - \frac{s}{4}$$

$$(3) \quad 0 < \frac{5 - s}{60} + \frac{3 - s}{15} + \frac{1 + s}{20}$$

$$(4) \quad 3 - \frac{2s}{15} > \frac{19}{5} + \frac{s}{3} - \frac{3s}{7}$$

8. نفس السؤال بالنسبة للمتراجحات الآتية :

$$(1) \quad 0 \geq \frac{10s}{15} - \frac{2 - s}{9} + 2 - \frac{3 - s}{3}$$

$$(2) \quad \frac{11 + s}{6} \geq \frac{8 + s}{3} - \frac{5 - s}{4}$$



$$3) \frac{3}{16} + \frac{s}{3} < \frac{7}{12} - \frac{1}{4} + \frac{5}{6}$$

$$4) 0 \geq \frac{1}{2} - \frac{1-s}{3} - \frac{2-s}{5}$$

9. حل في ح جمل المتراجحات الآتية ثم مثل بيانياً مجموعة الحلول في كل حالة :

$$\left. \begin{array}{l} 2s + 5 \leq 5 - s \\ 2s - 3 \geq 7 - s \end{array} \right\} (أ)$$

$$\left. \begin{array}{l} 9 - s < 15 - s \\ 5 - 19 \geq s + 3 \end{array} \right\} (ب)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3(14 - s) < 3 - s \\ 4(4 - s) \geq 14 - s \end{array} \right\} (ج)$$

10. نفس السؤال بالنسبة للجمل الآتية :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{15 - s}{2} < 5 - s \end{array} \right\} (أ)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3}{4} + s < (3 - s) \end{array} \right\} (ب)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3 - s}{4} > \frac{17 - s}{12} - \frac{4 - s}{3} \end{array} \right\} (ج)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{s + 11}{6} - s \leq \frac{18 - s}{2} - \frac{s}{3} \end{array} \right\} (د)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1 + s}{8} > \frac{(3 - s)4}{9} + \frac{1 - s}{3} \end{array} \right\} (هـ)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{21 + s}{4} \leq \frac{5 + s}{9} + \frac{9 + s}{3} \end{array} \right\} (و)$$

## العلاقات المترية في المثلث القائم نظرية فيثاغورث

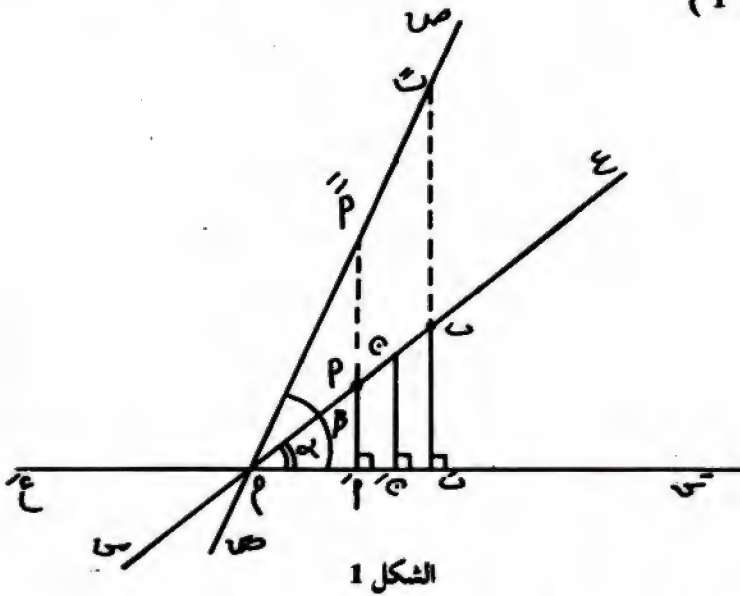
12

### 1- جيب تمام زاوية :-

• (س ع) ، (س'ع') مستقيمان متقاطعان في النقطة م ،

حيث  $\angle م س'ع' = \alpha$  و  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

أ ، ب نقطتان من (س ع) مسقطاهما العموديان على (س'ع') هما أ' ، ب' (الشكل 1)



بما أن (أ'أ) // (ب'ب) .

$$\frac{أ'م}{ب'م} = \frac{أم}{بم} \quad \text{فلدينا حسب نظرية طاليس}$$

$$\frac{أ'م}{ب'م} = \frac{أم}{بم} \quad \text{نستنتج أن}$$

وبصفة عامة :

مهما كانت النقطة  $\mathcal{D}$  من (س ع) فإن :

$$\frac{\mathcal{D}\mathcal{M}}{\mathcal{M}\mathcal{M}'} = \frac{\mathcal{D}\mathcal{M}'}{\mathcal{M}\mathcal{M}'} \text{ حيث } \mathcal{D}' \text{ هي المسقط العمودي للنقطة } \mathcal{D} \text{ على (س'ع') .}$$

نستنتج أن النسبة  $\frac{\mathcal{D}\mathcal{M}}{\mathcal{M}\mathcal{M}'}$  ثابتة . وتساوي النسبة  $\frac{\mathcal{D}'\mathcal{M}}{\mathcal{M}\mathcal{M}'}$  المتعلقة بالزاوية [م س' ، م ع] .

هذه النسبة تسمى جيب تمام الزاوية [م س' ، م ع] التي قيسها  $\alpha$  . ونرمز له بالرمز  $\text{تجيب } \alpha$  .

$$\text{نكتب : } \text{تجيب } \alpha = \frac{\mathcal{D}'\mathcal{M}}{\mathcal{M}\mathcal{M}'}$$

ونقرأ : جيب تمام الزاوية التي قيسها  $\alpha$  يساوي  $\frac{\mathcal{D}'\mathcal{M}}{\mathcal{M}\mathcal{M}'}$  .

• إذا كانت [م س' ، م ص] زاوية أخرى قيسها  $\beta$  حيث  $\alpha \neq \beta$  .

$0^\circ < \beta < 90^\circ$  ، وإذا كانت  $\mathcal{V}$  ،  $\mathcal{W}$  نقطتان من [م ص مستطاهما العموديان

على (س'ع') هما  $\mathcal{V}$  ،  $\mathcal{W}$  فإن النسبة  $\frac{\mathcal{V}\mathcal{M}}{\mathcal{M}\mathcal{M}'}$  ثابتة أيضا ولكنها تختلف عن النسبة

$$\frac{\mathcal{V}\mathcal{M}}{\mathcal{M}\mathcal{M}'} \text{ لأن } \mathcal{V}\mathcal{M} \neq \mathcal{W}\mathcal{M} .$$

النسبة  $\frac{\mathcal{V}\mathcal{M}}{\mathcal{M}\mathcal{M}'}$  تتعلق بالزاوية [م س' ، م ص] ، ويكون  $\text{تجيب } \beta = \frac{\mathcal{V}\mathcal{M}}{\mathcal{M}\mathcal{M}'}$

لاحظ أن  $\text{تجيب } \alpha \neq \text{تجيب } \beta$  .

هذا يعني أنه كلما غيرنا قياس الزاوية فإننا نحصل على نسبة ثابتة مرتبطة بقياس هذه الزاوية، وتسمى جيب تمام هذه الزاوية .

لاحظ أن [م أ] وتر في المثلث م أ ب أي أن م أ > م ب  
نستنتج أن  $\cos \alpha > 1$

ملاحظة :

إذا كانت أ ، ب ، ح ، د ، ..... نقط من المستقيم (س ع) مختلفة عن المبدأ م ومساقطها العمودية على (س' ع') هي النقط أ' ، ب' ، ح' ، د' ، ..... فيمكن أن نستنتج أن :

$$\frac{م أ'}{م أ} = \frac{م ب'}{م ب} = \frac{م ح'}{م ح} = \frac{م د'}{م د} = \dots$$

أي أن الأطوال م أ' ، م ب' ، م ح' ، م د' ، ..... متناسبة على التوالي مع الأطوال م أ ، م ب ، م ح ، م د ، ..... .

وأن معامل التناسب هو جيب تمام الزاوية [م س' ، م ع] .

حالتان خاصتان :

(1) إذا كان  $\alpha = 0^\circ$  فإن [م س' ينطبق على م ع] ، وتكون أ' منطبقة على أ

$$\text{أي } م أ' = م أ$$

$$\text{فالنسبة } 1 = \frac{م أ'}{م أ} \text{ وهذا يعني أن :}$$

$$\cos 0^\circ = 1$$

(2) إذا كان  $\alpha = 90^\circ$  فإن (م س') و (م ع) متعامدان في هذه الحالة

يكون مسقط النقط أ على [م س'] هو النقط م نفسها . أي م أ' = 0

$$\text{فالنسبة } 0 = \frac{م أ'}{م أ}$$



نستج أن :  $\text{تجيب } 90^\circ = 0$

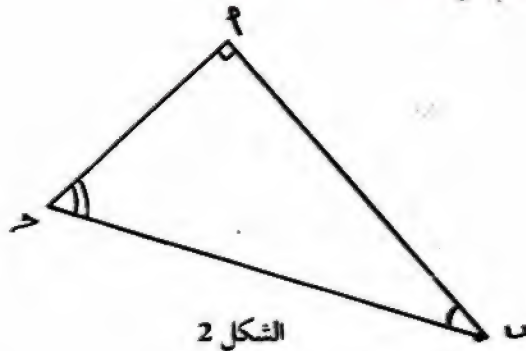
ملاحظة :

نكتفي في مستوى السنة التاسعة بدراسة جيب تمام زاوية قياسها محصور بين  $0^\circ$  و  $90^\circ$ .

بصفة عامة :

إذا كان  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$  فإن  $0 \leq \text{تجيب } x \leq 1$   
أي  $\text{تجيب } x \in [0, 1]$ .

2. جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم  
أب ح مثلث قائم في أ.



الشكل 2

كل من  $[AB, AC]$  و  $[AC, CB]$  هي زاوية حادة ،  
 $[AB, CB]$  هو الوتر ،  $[AB]$  ،  $[AC]$  هما ضلعا الزاوية القائمة .  
 بالنسبة إلى الزاوية  $[AB, AC]$  مثلا :

الضلع [بأ] يسمى الضلع المجاور لها ، والضلع [أب] يسمى الضلع المقابل لها

$$\frac{أب}{بأ} = \widehat{أبأ} \text{ و } \frac{أب}{بأ} = \widehat{أبأ}$$

يمكن أن ننص على ما يلي :

جيب تمام زاوية حادة في مثلث قائم يساوي نسبة طول الضلع المجاور إلى طول الوتر.

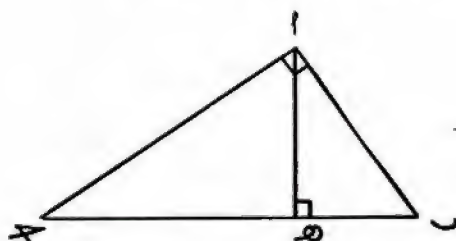
### 3. بعض العلاقات المترية في المثلث القائم :

توجد علاقات بين أطوال أضلاع مثلث أو بين أطوال أضلاعه وأقياس زواياه ، أو بين أطوال أضلاعه وأطوال بعض القطع الخاصة فيه ، هذه العلاقات تسمى علاقات مترية .

لنستخرج في المسائل الآتية بعض العلاقات المترية في مثلث قائم :

#### مسألة 1 :

أب ح مثلث قائم في أ ، [أه] عمود له .



الشكل 3

لنبرهن أن :

$$(1) أب^2 = أأ \times أأ$$

$$(2) أب^2 = أب \times أب$$

البرهان :

(1) في المثلث القائم  $أ ب ح$  لدينا :

$$(1) \dots\dots\dots \frac{أ ب}{ب ح} = \hat{أ ب ح}$$

وفي المثلث القائم  $أ ب هـ$  لدينا :

$$(2) \dots\dots\dots \frac{ب هـ}{أ ب} = \hat{أ ب ح}$$

$$\text{من (1) و (2) نستنتج أن : } \frac{أ ب}{ب ح} = \frac{ب هـ}{أ ب}$$

$$\text{إذن } أ ب \times ب هـ = ب ح \times أ ب$$

$$(1) \boxed{أ ب \times ب هـ = ب ح^2} \text{ أي}$$

(2) لدينا في المثلثين القائمين  $أ ب ح$  ،  $أ ب هـ$  :

$$\frac{أ ب}{ب ح} = \hat{أ ب ح} , \frac{أ ب}{ب ح} = \hat{أ ب ح}$$

$$\text{نستنتج أن } \frac{أ ب}{ب ح} = \frac{أ ب}{ب ح}$$

$$\text{ومنه } أ ب \times ب هـ = ب ح^2$$

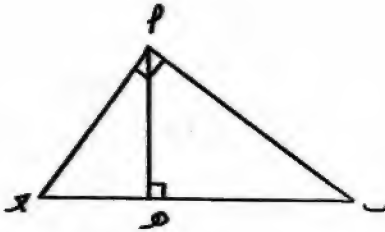
$$(2) \boxed{أ ب \times ب هـ = ب ح^2} \text{ أي}$$

## مسألة 2 :

أب ح مثلث قائم وتره [ح ب] .

لنبرهن: أن :

$$أب^2 = أا^2 + أ ب^2$$



الشكل 4

البرهان :

نرسم العمود [أا] فيكون حسب المسألة 1 :

$$أب^2 = أا^2 + أ ب^2 \quad (1)$$

$$أا^2 = أا \times أ ب \quad (2)$$

وبالجمع نجد :

$$أب^2 + أا^2 = أا^2 + أا \times أ ب + أ ب^2$$

$$أب^2 = أا \times (أا + أ ب) \quad \text{لكن } أا + أ ب = أ ب \text{ ، } أا \times أ ب = أا^2$$

$$\text{إذن } أب^2 = أا^2 + أا \times أ ب$$

$$(3) \quad \boxed{أب^2 = أا^2 + أ ب^2} \quad \text{أي}$$

يمكن أن ننص على النظرية الآتية التي تسمى نظرية فيثاغورث

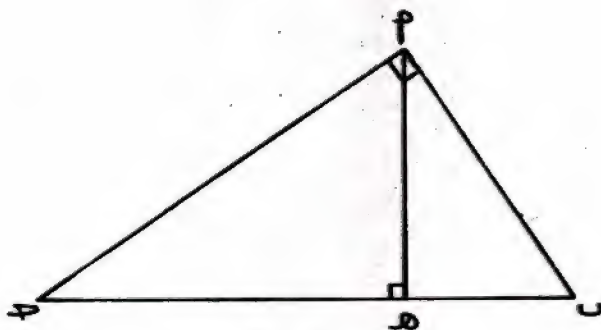
في مثلث قائم :

مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين القائمين

- (1)  $AB \perp CH$  مثلث قائم في  $A$  حيث  $AB = 3$  ،  $AC = 4$  .  
 $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  .  
 - احسب كلاً من  $CH$  ،  $BH$  ،  $CH$  .
- (2)  $AB \perp CH$  مثلث قائم في  $A$  ومتساوي الساقين حيث  $AB = 5$  .  
 احسب  $BH$  .

### مسألة 3 :

- $AB \perp CH$  مثلث قائم :  $[AH]$  عمود له ( الشكل 5 ) .  
 لنبرهن أن :  $AH^2 = BH \times CH$



الشكل 5

### البرهان :

- حسب العلاقة 1 لدينا  $AH^2 = BH \times CH$  .  
 وبتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم  $AH$  نجد :  
 $AH^2 + BH^2 = AB^2$   
 $AH^2 = AB^2 - BH^2$  أي :



نستج أن :

$$a^2 = b \times c - b \times d$$

$$a^2 = b \times c - (b \times d)$$

$$a^2 = b \times c - b \times d$$

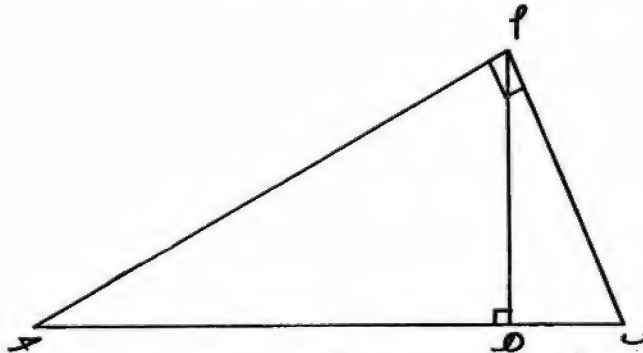
أي  $a^2 = b \times c - b \times d$  (4)

لاحظ في هذه العلاقة أن  $h$  و  $h$  هما طولا المسقطين العموديين للضلعين القائمين  $[ab]$  ،  $[ac]$  على  $(b)$  . وأن  $a$  هو الارتفاع المتعلق بالوتر  $[b]$  .  
يمكن أن ننص على النظرية الآتية :

في مثلث قائم : مربع الارتفاع المتعلق بالوتر يساوي جداء طولي المسقطين العموديين للضلعين القائمين على الوتر .

مسألة 4 :

$abc$  مثلث قائم في  $a$  ،  $[ah]$  عمود له ( الشكل 6 )  
لنبرهن أن :  $a^2 = b \times c - b \times d$  .



الشكل 6

البرهان :

$$\text{نعلم أن مساحة المثلث } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BD.$$

$$\text{ومساحة المثلث } \triangle ACD = \frac{1}{2} \times AC \times DE.$$

$$\text{ومساحة المثلث } \triangle BCD = \frac{1}{2} \times AC \times DF.$$

ولكن مجموع مساحتي المثلثين  $\triangle ACD$  ،  $\triangle BCD$  تساوي مساحة المثلث  $\triangle ABC$ .

$$\text{أي } \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times AC \times DE + \frac{1}{2} \times AC \times DF.$$

$$\text{إذن } \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times AC \times (DE + DF).$$

نستنتج أن :

(5) .....

$$AC \times BD = AC \times (DE + DF)$$

نظرية :

في مثلث قائم :  
جاء طول الوتر والارتفاع المتعلق به يساوي جداء طولي الضلعين القائمين .

$\triangle ABC$  مثلث قائم في  $A$  حيث  $AB = 6$  ،  $AC = 10$  .  
النقطة  $D$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  .  
احسب كلا من  $AD$  ،  $BD$  ،  $CD$  ،  $AD$  .

### خلاصة :

إذا كان  $AB \perp CH$  مثلثاً قائماً في  $A$  ،  $[AH]$  عموداً له فإن :

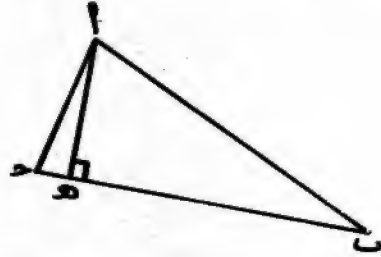
(1)  $AB^2 = BH \times AC$  .

(2)  $AC^2 = CH \times AB$  .

(3)  $BC^2 = BH^2 + AC^2$  .

(4)  $AB \times CH = AC^2$  .

(5)  $AB \times CH = AC^2$  .



نقبل ما يلي :

• إذا تحققت إحدى العلاقات (3) أو (5) في مثلث  $AB \perp CH$  حيث  $[AH]$  عمود له فإن هذا المثلث يكون قائماً في الرأس  $A$  .

• إذا تحققت إحدى العلاقات (1) أو (2) أو (4) في مثلث  $AB \perp CH$  حيث  $[AH]$  عمود له و  $H$  نقطة من  $[BC]$  ، فإن هذا المثلث يكون قائماً في الرأس  $A$  .

(1)  $AB \perp CH$  حيث  $AB = 27$  ،  $AC = 36$  ،  $BC = 45$  .

يبين أن  $AB \perp CH$  قائم في الرأس  $A$  .

(2)  $AB \perp CH$  قائم في  $A$  حيث  $AB = 6$  ،  $AC = 8$  .

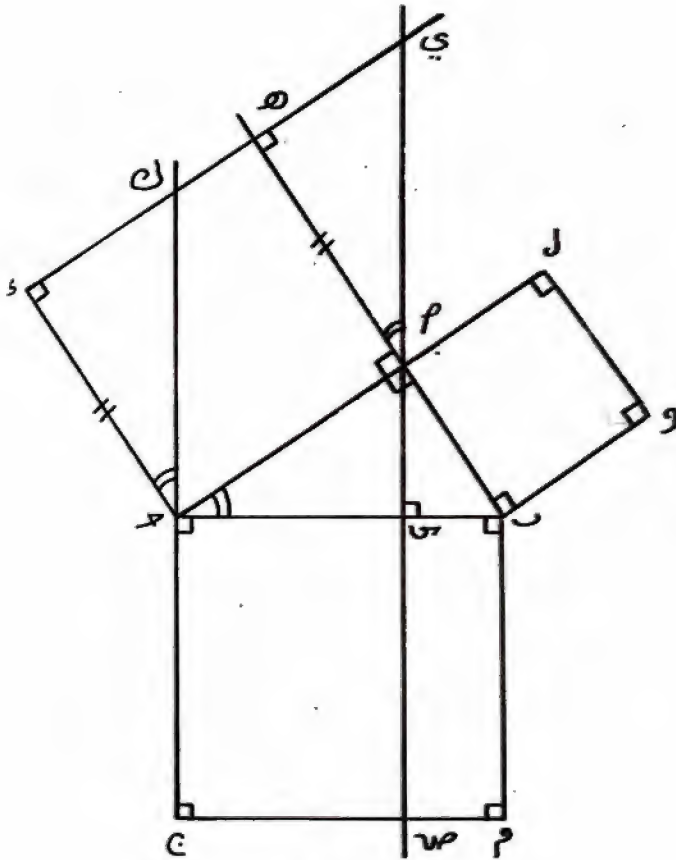
$[AH]$  عمود متعلق بالضلع  $[BC]$  .

أوجد كلاً من  $AH$  ،  $HB$  ،  $HC$  .

## برهان آخر لنظرية فيثاغورث :

مسألة :

أ ب ح مثلث قائم في أ ، ننشئ على الوتر المربع ب ح د م ، وعلى الضلع [أ ب] المربع أ ب و ل ، وعلى الضلع [أ ح] المربع أ ح د هـ .  
- لتبرهن أن مساحة المربع ب ح د م تساوي مجموع مساحتي المربعين أ ب و ل . أ ح د هـ .



الشكل 7

### البرهان :

نرسم المستقيم (د ح) الذي يقطع (ز هـ) في ك ، والمستقيم الذي يشمل ا ويعامد (ب ح) في س يقطع (م هـ) و (ز هـ) في ص ، ي على الترتيب .

• المثلثان ا ح ب ، ز ح ك متقايسان لأن :

$$\begin{aligned} & \text{ا ح ز} = \text{ز ح} \quad (\text{ا ح ز هـ مربع}) . \\ & \text{ا ح ب} = \text{ز ح ك} \quad ([\text{ا ح} , \text{ح ب}] \text{ و } [\text{ح ك} , \text{ح ز}] \text{ لهما نفس المتمة } [\text{ا ح} , \text{ح ك}]) \\ & \text{ب ا ح} = \text{ك ز ح} = 1 \text{ قا} \\ & \text{نستنتج أن } \text{ب ا ح} = \text{ك ز ح} \\ & \text{لكن } \text{ح ب} = \text{ح ز} . \\ & \text{إذن } \text{ح م} = \text{ح ك} . \end{aligned}$$

• الرباعي ا ح ك ي متوازي أضلاع لأن :

(ح ك) // (ا يـ) (عموديان على نفس المستقيم (ب ح) .)

(ح ا) // (ك يـ) لأنها حاملتا ضلعين متقابلين في مربع .

ومساحة متوازي الأضلاع ا ح ك ي تساوي ا ح × ا هـ .

لكن ا ح × ا هـ هي أيضا مساحة المربع ا ح ز هـ .

مساحة متوازي الأضلاع ا ح ك ي تساوي أيضًا ح ك × ح س

لكن ح ك × ح س = ح ز × ح س وهي مساحة المستطيل س ح ز ص .

نستنتج أن :

مساحة المربع ا ح ز هـ تساوي مساحة المستطيل س ح ز ص

• نبرهن - بنفس الطريقة - على أن مساحة المربع ا ب و ل تساوي مساحة

المستطيل ب س ص م .

لكن مساحة المربع ب ح ز م تساوي مجموع مساحتي المستطيلين ب س ص م ،

س ح ز ص .



نستنتج أن :

مساحة المربع  $ABCD$  تساوي مجموع مساحتي المربعين  $AEFG$  و  $EFHD$ .

$$AB^2 = AE^2 + EF^2 + FD^2$$

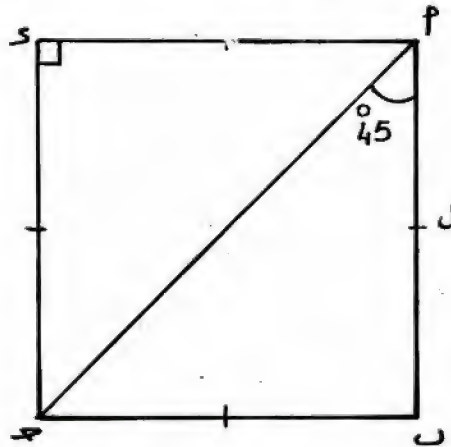
مساحة المربع المنشأ على وتر مثلث قائم تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين القائمين.

#### 4 تطبيقات

(1) طول قطر مربع :

مسألة :

أب ح د مربع طول ضلعه  $l$  (الشكل 8)  
لنحسب طول قطره بدلالة  $l$ .



الشكل 8

الحل :

بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم  $ABC$  نجد :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

لكن  $a = b = c$

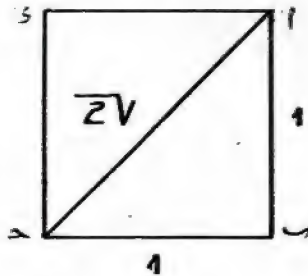
إذن  $a^2 = b^2 + c^2 = 2a^2$

أي  $a = \sqrt{2}a$

طول قطر مربع يساوي جذاء طول ضلع المربع والعدد  $\sqrt{2}$

• حالة خاصة :

إذا كان  $a = 1$  فإن  $a = \sqrt{2}$  (الشكل 9)



الشكل 9

• ملاحظة :

في (الشكل 8) ،  $(a)$  ينصف كلاً من الزاويتين  $[a, b]$  ،  $[b, c]$  .

إذن  $\widehat{a} = \widehat{b} = \widehat{c} = 45^\circ$  .

ولدينا يجب  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{a \times \sqrt{2}} = \frac{b}{a}$

ولكن  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

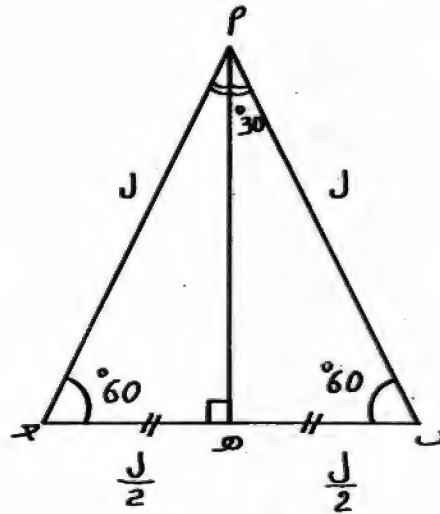
نستج أن يجب  $\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$

أ ب ح د مربع طول ضلعه 6 سم ، احسب طول قطره .

(2) ارتفاع مثلث متقايس الأضلاع :

مسألة :

أ ب ح د مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه ل . ( الشكل 10 ) .  
لنحسب ارتفاعه بدلالة ل .



الشكل 10

الحل :

بما أن المثلث أ ب ح د متقايس الأضلاع ، فالعمود (أ د) هو محور [ ب ح ]  
وهو منتصف الزاوية [ أ ب ح ] ( الشكل 10 ) .

فالمثلث أ ب د قائم الزاوية في د .  $\angle B = 60^\circ$  ،  $\angle BAD = 30^\circ$  .  
وبتطبيق نظرية فيثاغورث يكون :

$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$

$$\text{ومنه } \angle ه = \angle ب - \angle ا = 2\angle ه$$

$$\text{لكن } \angle ب = \frac{1}{2} \angle ه = \frac{1}{2} \times 2\angle ه = \angle ه$$

$$\text{إذن } \angle ه = 2\angle ب = 2 \times \frac{2\angle ه}{4} = \angle ه$$

$$\text{أي } \frac{3}{4} \angle ه = \angle ه$$

$$\text{ومنه } \angle ه = \frac{3}{2} \times \angle ب$$

نستنتج أن :

$$\text{ارتفاع مثلث متقايس الأضلاع يساوي جداء طول ضلعه والعدد } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ملاحظة 1 :

في الشكل 10 ، المثلث ا ب ه قائم و  $\angle ب = 60^\circ$  و  $\angle ا = 30^\circ$  .

$$\text{إذن يجب } 60^\circ = \frac{\angle ب}{\angle ا} = \frac{\frac{1}{2} \angle ه}{\frac{1}{2} \angle ه} = \frac{1}{2} \angle ه$$

$$\text{يجب } 30^\circ = \frac{\angle ا}{\angle ب} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \angle ب}{\frac{1}{2} \angle ب} = \frac{\sqrt{3}}{2} \angle ب$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \sin 60^\circ \text{ أي} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \sin 30^\circ \end{aligned}$$

أب ح د معين حيث  $\angle A = 60^\circ$  .  $AB = 6$  .  
احسب طولي قطريه .

ملاحظة 2 :

في المثلث القائم أ ب د لدينا ما يلي :

• الضلع [ ب د ] مقابل للزاوية التي قيسها  $30^\circ$  و  $BD = \frac{AB}{2}$

والضلع [ أ د ] مجاور لهذه الزاوية حيث  $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB$

وأيضاً  $BD = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times AD$

تستج ما يلي :

في مثلث قائم :

إذا كان قيس إحدى الزاويتين الحادتين هو  $30^\circ$  . فإن :

• طول الضلع المقابل لهذه الزاوية يساوي نصف طول الوتر .

وطول الضلع المجاور لهذه الزاوية يساوي جداء طول الوتر والعدد  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  .

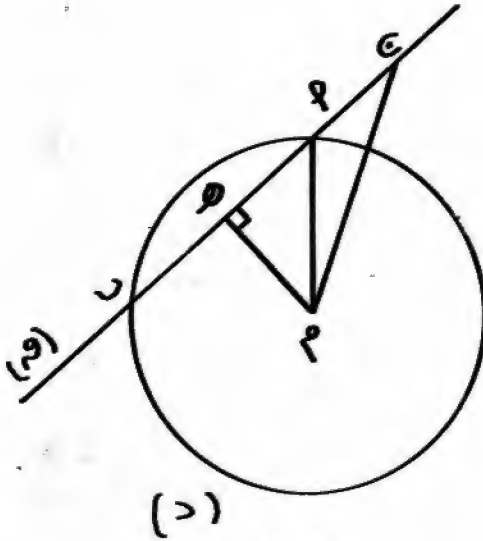
أو يساوي جداء طول الضلع المقابل لهذه الزاوية والعدد  $\frac{1}{2} \times \sqrt{3}$  .



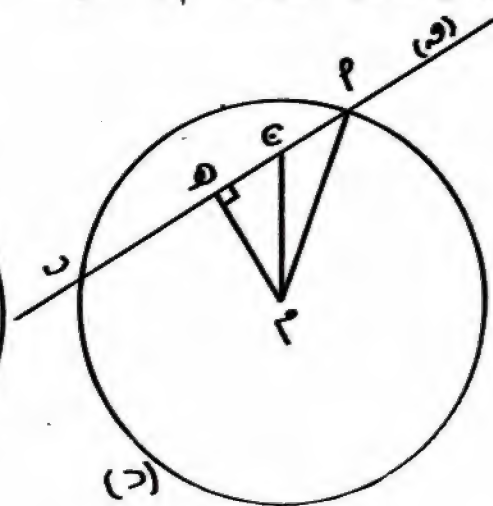
(3) قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة :

مسألة 1 :

د (م ، ن) دائرة ، ه نقطة من المستوى ، (و) مستقيم يشمل النقطة ه ويقطع (د) في النقطتين ا ، ب (الشكلان 11 ، 12)  
لنبرهن أن  $\overline{ه ا} \times \overline{ه ب} = \overline{م ه}^2 - \overline{ن ه}^2$



الشكل 12



الشكل 11

البرهان :

- نسمي ه المسقط العمودي للنقطة م على (و) ، فيكون (م ه) هو محور القطعة [ ا ب ] .

وبتطبيق نظرية فيثاغورث على كل من المثلثين القائمين م ه ا ، م ه ب نجد :

$$(1) \quad \overline{م ه}^2 + \overline{ه ا}^2 = \overline{م ا}^2 \dots\dots$$

$$(2) \quad \overline{م ه}^2 + \overline{ه ب}^2 = \overline{م ب}^2 \dots\dots$$

ولدينا أيضا حسب علاقة شال :

$$\overline{ه ا} \times \overline{ه ب} = \overline{ه د}^2 - \overline{م د}^2$$

$$\text{وبما أن } \overline{h} = -\overline{h} \text{ فإن } \overline{h} = \overline{h} - \overline{h} \\ \text{إذن } \overline{h} \times \overline{h} = \overline{h} (\overline{h} + \overline{h}) (\overline{h} - \overline{h}).$$

$$\text{ومنه } \overline{h} \times \overline{h} = \overline{h} (\overline{h}^2 - \overline{h}^2)$$

$$\text{ونعلم أن } \overline{h}^2 = \overline{h}^2, \overline{h}^2 = \overline{h}^2$$

$$\text{نستنتج أن } \overline{h} \times \overline{h} = \overline{h} (\overline{h}^2 - \overline{h}^2).$$

ومن العلاقتين (1) ، (2) يكون :

$$\overline{h}^2 = \overline{h}^2 - \overline{h}^2, \overline{h}^2 = \overline{h}^2 - \overline{h}^2$$

$$\overline{h} \times \overline{h} = \overline{h} (\overline{h}^2 - \overline{h}^2)$$

$$\overline{h} \times \overline{h} = \overline{h} (\overline{h}^2 - \overline{h}^2) - (\overline{h}^2 - \overline{h}^2)$$

$$\overline{h} \times \overline{h} = \overline{h}^2 - \overline{h}^2 + \overline{h}^2 - \overline{h}^2$$

$$\overline{h} \times \overline{h} = \overline{h}^2 - \overline{h}^2.$$

$$\text{ولكن } \overline{h} = \overline{h}$$

$$\text{إذن } \overline{h} \times \overline{h} = \overline{h}^2 - \overline{h}^2$$

نظرية :

(م ، ن) دائرة ،  $\overline{h}$  نقطة من المستوي .  
 إذا كان (ق) مستقيماً يشمل  $\overline{h}$  ويقطع (د) في النقطتين ا ، ب فإن :  
 $\overline{h} \times \overline{h} = \overline{h}^2 - \overline{h}^2$

الجداء  $\overline{h} \times \overline{h}$  يسمى قوة النقطة  $\overline{h}$  بالنسبة إلى الدائرة (د) .

ملاحظات :

• إذا كانت  $\overline{h}$  خارج الدائرة (د) فإن  $\overline{h} < \overline{h}$  أو  $\overline{h}^2 < \overline{h}^2$ .

نستنتج أن  $\overline{h}^2 - \overline{h}^2 < 0$  أي  $\overline{h} \times \overline{h} < 0$ .

• إذا كانت  $\overline{h}$  داخل الدائرة (د) فإن  $\overline{h} \times \overline{h} > 0$ .

• إذا كانت  $\overline{h}$  تنتمي إلى (د) فإن  $\overline{h} \times \overline{h} = 0$ .

## خلاصة :

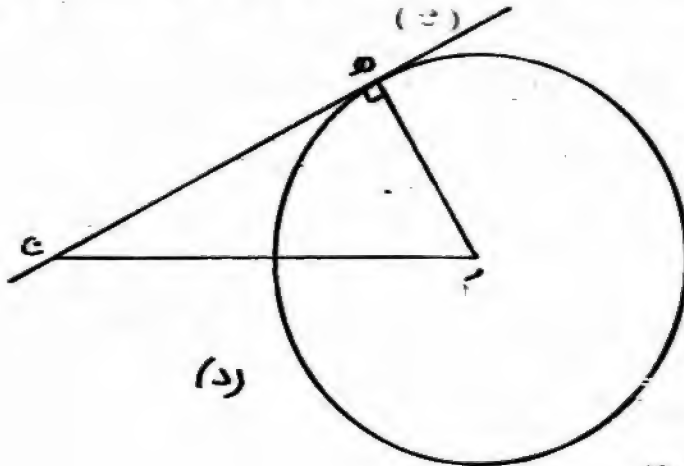
- قوة نقطة بالنسبة إلى دائرة تكون :
- موجبة إذا كانت هذه النقطة خارج الدائرة .
  - سالبة إذا كانت هذه النقطة داخل الدائرة .
  - معدومة إذا كانت هذه النقطة تنتمي إلى الدائرة .

يمكن أن نبرهن على النظرية الآتية :

- د (م ، ن) دائرة ، و نقطة من المستوي .  
 إذا كان (و) ، (و') مستقيمين يمتثلان و ويقطعان (د) في النقاط  
 ا ، ب و ا' ، ب' على الترتيب فإن :  
 $\vec{OA} \times \vec{OB} = \vec{OA'} \times \vec{OB'}$  .

## مسألة 2 :

- د (م ، ن) دائرة ، و نقطة خارج الدائرة (د) ، (و) مستقيم يشمل و ويمس  
 (د) في النقطة هـ . (الشكل 13) .  
 - لبرهن أن قوة النقطة و بالنسبة إلى الدائرة (د) هي العدد  $\vec{OH} \cdot \vec{OW}$  .



الشكل 13



### البرهان :

نعلم أن قوة النقطة  $\mathcal{H}$  بالنسبة إلى الدائرة  $\mathcal{D}$  (  $\mathcal{M}$  ،  $\mathcal{N}$  ) هي العدد  $\mathcal{M}^2 - \mathcal{N}^2$  .  
 بما أن (  $\mathcal{H}$  ) مماس فإن (  $\mathcal{M}$  )  $\perp$  (  $\mathcal{H}$  ) .  
 وب تطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم  $\mathcal{M}$   $\mathcal{H}$  نجد أن :

$$\mathcal{M}^2 = \mathcal{H}^2 + \mathcal{H}^2$$

$$\text{ومنه } \mathcal{M}^2 - \mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2 - \mathcal{H}^2$$

$$\text{وبما أن } \mathcal{M} = \mathcal{H} \text{ فإن } \mathcal{M}^2 - \mathcal{H}^2 = 0 = \mathcal{H}^2$$

نستنتج أن قوة النقطة  $\mathcal{H}$  بالنسبة إلى الدائرة  $\mathcal{D}$  (  $\mathcal{M}$  ،  $\mathcal{N}$  ) هي العدد  $\mathcal{H}^2$  .

### نظرية :

(  $\mathcal{D}$  ) دائرة و (  $\mathcal{Q}$  ) مماس لها في النقطة  $\mathcal{H}$  .  
 إذا كانت  $\mathcal{H}$  نقطة من (  $\mathcal{Q}$  ) فإن قوة  $\mathcal{H}$  بالنسبة إلى (  $\mathcal{D}$  ) تساوي  $\mathcal{H}^2$  .

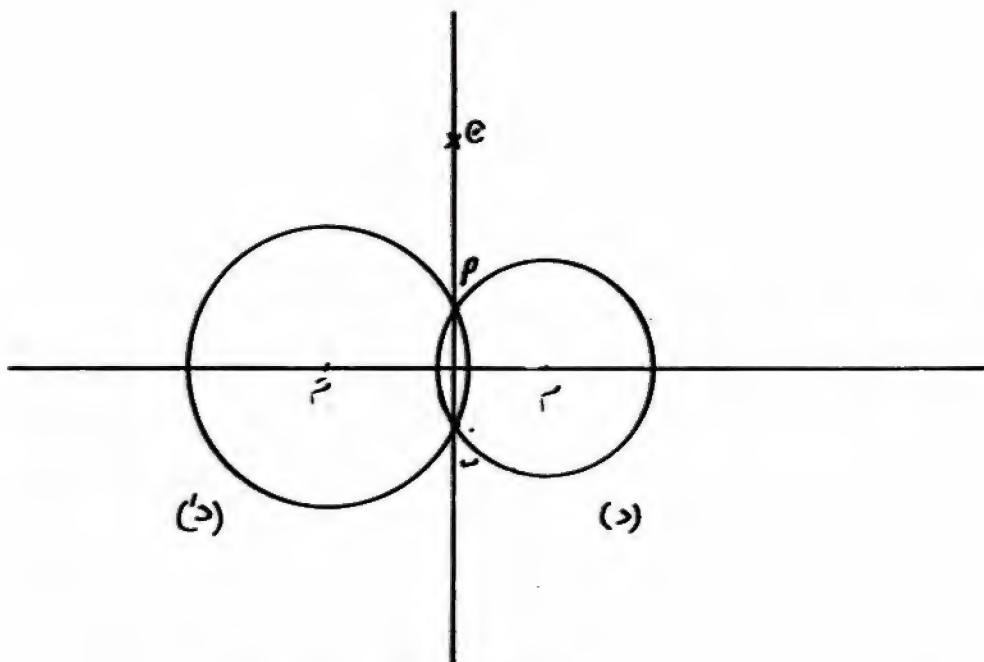
### مسألة 3 :

$\mathcal{D}$  (  $\mathcal{M}$  ،  $\mathcal{N}$  ) و  $\mathcal{D}'$  (  $\mathcal{M}'$  ،  $\mathcal{N}'$  ) دائرتان متقاطعتان في النقطتين  $\mathcal{A}$  ،  $\mathcal{B}$  ( الشكل 14 ) .

لنبرهن ما يلي :

$$(1) \quad (\mathcal{A}\mathcal{B}) \perp (\mathcal{M}\mathcal{M}')$$

(2) إذا كانت  $\mathcal{H}$  نقطة من (  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  ) فإن قوتها بالنسبة إلى كل من (  $\mathcal{D}$  ) و (  $\mathcal{D}'$  ) متساويتان .



الشكل 14

البرهان :

- 1) بما أن  $م = ا$  فإن  $م$  تنتمي إلى محور  $[ا ب]$  وأيضًا  $م' = ا$  فإن  $م'$  تنتمي إلى محور  $[ا ب]$ .  
نستنتج أن  $(م م')$  هو محور  $[ا ب]$ .  
أي أن  $(ا ب) \perp (م م')$ .
- 2)  $\odot$  نقطة من المستقيم  $(ا ب)$  . قوتها بالنسبة إلى  $(د)$  تساوي  $\odot ا \times \odot ب$  . وأيضًا قوتها بالنسبة إلى  $(د')$  تساوي  $\odot ا \times \odot ب$  .  
نستنتج أن للنقطة  $\odot$  نفس القوة بالنسبة إلى الدائرتين .  
وبصفة عامة كل نقطة من المستقيم  $(ا ب)$  تكون متساوية القوة بالنسبة إلى الدائرتين  $(د)$  .  $(د')$  .  
المستقيم  $(ا ب)$  يسمى المحور الأساسي للدائرتين  $(د)$  ،  $(د')$  .



تعريف :

المحور الأساسي لدائرتين غير متمركزتين هو مجموعة نقاط المستوي المتساوية القوة بالنسبة إلى هاتين الدائرتين .

### مسألة محلولة

وحدة الطول هي المستمر .

- أ ب ح مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه 4 ، د هي نظيرة أ بالنسبة إلى ح .
- (1) برهن أن المثلث أ ب د قائم في ب ثم احسب ب د .
  - (2) م منتصف [ ب ح ] ، المستقيم ( أ م ) والمستقيم ( ق ) العمودي على ( ب ح ) في ح يقطعان ( ب د ) في النقطتين د ، ه على الترتيب
  - برهن أن القطع [ ب د ] ، [ د ه ] ، [ ه د ] متقايسة ، ثم احسب الطول المشترك لها .
  - احسب أ ه .
  - (3) برهن أن كلاً من المثلثين أ ه د و ح ه د متساوي الساقين .
  - (4) برهن أن المثلث د ح د قائم في ح ، وأن الرباعي أ ب د ح دائري .
  - (5) احسب قوة النقطة د بالنسبة إلى الدائرة المحيطة بالرباعي أ ب د ح ، ثم استنتج أن النقطة ه لا تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث أ ب ح .
- المعطيات :

$$أ ب = أ ح = ب ح = 4 . د \in [ أ ب ] و أ د = 4$$

$$م منتصف [ ب ح ] ، ( د ح ) \perp ( ب ح ) .$$

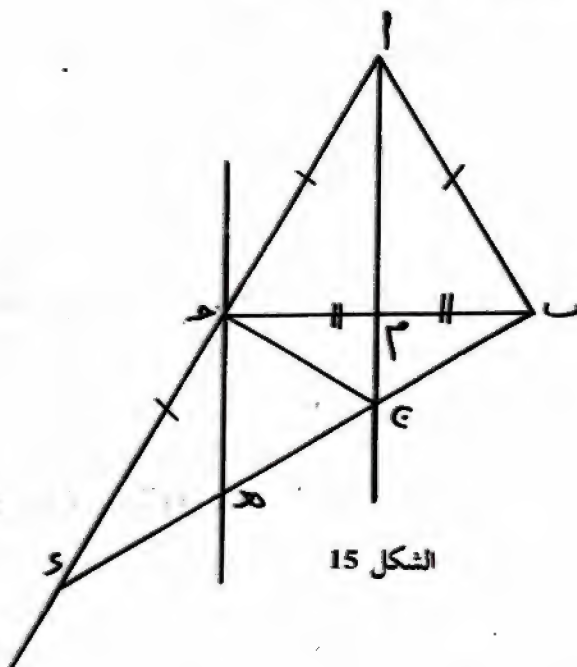
$$\{ ه \} = ( ب د ) \cap ( ق ) ، \{ د \} = ( ب د ) \cap ( أ م ) .$$

المطلوب إثبات أن :

$$(1) \text{ المثلث أ ب د قائم في ب ثم حساب ب د .}$$

$$(2) ب د = د ه = ه د ثم حساب أ ه .$$

- (3) كلاً من المثلثين  $أ د ز$  و  $ح د ز$  متساوي الساقين .  
 (4) المثلث  $د ح ز$  قائم و  $أ م د$  ح رباعي دائري .  
 (5) حساب قوة النقطة  $ز$  بالنسبة إلى الدائرة المحيطة بالرباعي  $أ م د ح$  . ثم استنتاج أن النقطة  $هـ$  تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث  $أ م د$  .



البرهان :

لدينا حسب المعطيات

$$أ م = م د = د ح = ح أ$$

$$\text{و } د ز = ز أ$$

$$\text{نستنتج أن } م د = د أ = أ م = م ح = ح د = د ز = ز أ = أ ح$$

$$\text{وهذا يعني أن } م د = \frac{أ د}{2}$$

إذن في المثلث  $أ م د$  طول المتوسط  $[م د]$  يساوي نصف طول الضلع المتعلق به .  
 فالمثلث  $أ م د$  قائم في  $م$  .

• وبطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث  $امز$  نجد :  
 $ام^2 + مز^2 = از^2$  ومنه  $مز = \sqrt{از^2 - ام^2}$   
 لكن  $از = 2ام$  أي  $از^2 = 4ام^2$   
 إذن  $مز = \sqrt{4ام^2 - ام^2}$   
 ويكون  $مز = \sqrt{3ام^2}$  أي  $مز = \sqrt{3} \times ام$

نستنتج أن  $مز = \sqrt{3} \times ام$

(2) • بما أن المثلث  $امح$  متقايس الأضلاع وم منتصف  $[مخ]$  فإن المتوسط  $(ام)$  هو محور  $[مخ]$  . إذن  $(ام) \perp (مخ)$  .  
 ولدينا أيضًا حسب المعطيات  $(مخ) \perp (حز)$  .  
 نستنتج أن  $(ام) \parallel (حز)$  .

• في المثلث  $محه$  . المستقيم  $(مز)$  يوازي  $(حز)$  ويشمل م منتصف  $[مخ]$  .  
 فهو يشمل منتصف الضلع  $[مه]$   
 نستنتج أن  $ز$  هي منتصف  $[مه]$  .  
 ومنه  $مز = زه = 1$  .

• في المثلث  $زاه$  . المستقيم  $(حز)$  يوازي  $(اه)$  ويشمل ح منتصف  $[اه]$  . فهو يشمل منتصف الضلع  $[زه]$  .  
 نستنتج أن النقطة  $ه$  هي منتصف  $[زه]$  .  
 ومنه  $زه = هز = 2$  .  
 من (1) . (2) نستنتج أن  $مز = زه = هز$  .

فقطع  $[مه]$  :  $[زه]$  ،  $[مخ]$  ،  $[مخ]$  متقايسة وطولها المشترك يساوي  $\frac{مز}{3}$  أي  $\frac{\sqrt{3} \times ام}{3}$  .

• حساب  $اه$  :

في المثلث القائم  $امه$  لدينا حسب نظرية فيثاغورث :

$$ام^2 + مه^2 = اه^2$$

$$\frac{16}{3} + 16 = \frac{48}{9} + 16 = \left( \frac{\sqrt{3} \times ام}{3} \right)^2 + 4 = اه^2$$

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{3} = \frac{8}{3\sqrt{}} = \frac{64}{3} = 2^2 \text{ أي } \frac{8}{3\sqrt{}} = 2 \text{ ومنه } \frac{8}{3\sqrt{}} = 2 \text{ أي } \frac{8}{3\sqrt{}} = 2$$

$$(3) \bullet \text{ لدينا } \frac{\sqrt[3]{8}}{3} = \left( \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \right) \times 2 = 2 \text{ ومنه } \frac{\sqrt[3]{8}}{3} = 2$$

$$\frac{\sqrt[3]{8}}{3} = 2$$

نستنتج أن  $\frac{\sqrt[3]{8}}{3} = 2$  وهذا يعني أن المثلث  $\triangle ABC$  متساوي الساقين .  
 • في المثلث  $\triangle ABC$  :  $\angle A = \angle B$  هما متصفاه الضلعين  $[AC] \cdot [AB]$  على الترتيب .

$$\text{إذن } \angle C = \frac{1}{2} \angle A$$

$$\text{أي } \frac{\sqrt[3]{4}}{3} = \frac{\sqrt[3]{8}}{6} = \frac{\sqrt[3]{8}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{3} = \frac{1}{2} \text{ ونعلم أن } \frac{\sqrt[3]{4}}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن } \angle C = \angle A$$

فالمثلث  $\triangle ABC$  متساوي الساقين .  
 (4) • في المثلث المتساوي الساقين  $\triangle ABC$  : المتوسط  $(AD)$  هو أيضًا عمود له .

نستنتج أن  $(AD) \perp (BC)$  .  
 أي أن المثلث  $\triangle ABC$  قائم في  $C$  .  
 • لدينا في الرباعي  $ABCD$  :  
 $\angle A = 90^\circ$  (حسب الطلب الأول)  
 $\angle C = 90^\circ$  (لأن  $(AD) \perp (BC)$ )  
 إذن  $\angle A + \angle C = 180^\circ$  .  
 فالزاويتان المتقابلتان  $[A] \cdot [C]$  .  $[B] \cdot [D]$  متكاملتان .  
 نستنتج أن الرباعي  $ABCD$  دائري .

(5) • إن قوة النقطة  $z$  بالنسبة إلى الدائرة المحيطة بالرباعي  $abcd$  تساوي  $z \times \overline{a} \times \overline{c}$  وأيضاً  $z \times \overline{b} \times \overline{d}$ .

لنحسب مثلاً  $z \times \overline{a} \times \overline{c}$

لدينا  $z \times \overline{a} \times \overline{c} = 4$  و  $z \times \overline{b} \times \overline{d} = 8$  إذن  $8 = 4 \times 2 = 8 \times 1 = 32$ .

لدينا  $z \times \overline{b} \times \overline{d} = \frac{3\sqrt{4}}{3}$  و  $3\sqrt{4} = \overline{b} \times \overline{d}$

إذن  $16 = 3\sqrt{4} \times \frac{3\sqrt{4}}{3} = \overline{b} \times \overline{d} \times 16$

• الدائرة المحيطة بالرباعي  $abcd$  تشمل النقط  $a, b, c, d$  فهي الدائرة المحيطة بالمثلث

$abc$ .

إذا فرضنا أن  $h$  هي نقطة من الدائرة المحيطة بالمثلث  $abc$  فإن:  $z \times \overline{a} \times \overline{c} = z \times \overline{b} \times \overline{d}$

لكن  $z \times \overline{a} \times \overline{c} = z \times \overline{b} \times \overline{d}$  (قوة النقطة  $z$  بالنسبة إلى الدائرة المحيطة بالرباعي

$abcd$ )

إذن  $z \times \overline{a} \times \overline{c} = z \times \overline{b} \times \overline{d}$

وبما أن  $z \times \overline{a} \times \overline{c} \neq 0$  فإن  $z \times \overline{a} \times \overline{c} = z \times \overline{b} \times \overline{d}$  وهذا يعني أن النقطتين  $h, d$  متطابقتان. وهذا مستحيل

حسب المعطيات.

إذن النقطة  $h$  لا تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث  $abc$ .



## تمارين

وحدة الطول هي السنتيمتر

1.  $AB$  مثلث قائم في  $A$  حيث  $AB = 6$  ،  $AC = 8$

$H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  .

- احسب  $BC$  ،  $AH$  ،  $CH$  ،  $CH$  .

2.  $AB$  مثلث قائم في  $A$  حيث  $AB = 3$  ،  $AC = 5$  .

$E$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  .

- احسب  $AC$  ،  $AE$  ،  $BE$  ،  $CE$  .

3.  $AB$  مثلث حيث  $AB = 2\sqrt{13}$  ،  $AC = 4\sqrt{3}$  ،  $BC = 10$  .

(1) بين أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  .

(2)  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  .

- احسب  $BC$  ،  $CH$  ،  $AH$  .

(ش.ت.أ لسنة 1981)

4.  $ABC$  رباعي حيث  $(AC)$  و  $(BD)$  متعامدان .

من أن  $AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$  .

5.  $ABC$  مثلث ،  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  حيث  $AB = 6$  ،

$BC = 9$  ،  $CH = 4$  .

- بين أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$  .

6.  $ABC$  مثلث قائم في  $A$  ،  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$  ؛  $A'$  ،  $B'$  ،  $C'$

متصفات الأضلاع  $[AB]$  ،  $[AC]$  ،  $[BC]$  على التوالي .

- احسب  $BC$  ،  $AC$  ،  $A'A$  ،  $B'B$  ،  $C'C$  ،  $AH$  علماً بأن  $AB = 30$  ،

$BC = 18$  .

7. [أب] قطعة مستقيمة طولها 2 ط (حيث ط عدد موجب معلوم)  
(ق) و (ق') مستقيمان عموديان على (أب) في أ ، ب على الترتيب ،

$$ح نقطة من (ق) بحيث  $أح = \frac{1}{2} أب$ .$$

المستقيم الذي يشمل أ ويعامد (ب ح) في النقطة ه يقطع (ق') في النقطة ز .  
احسب بدلالة ط كلاً من :

(1) ب ح ، ب ه ، ح ه ، أ ه .

(2) أ ز ، ز ه ، ب ز ، ح ز .

8. [أب] قطعة مستقيمة طولها 10 ، (ق) مستقيم يعامد (أب) في أ ، (ك) مستقيم يعامد (أب) في ب ؛ ح نقطة من (ق) بحيث  $أح = 8$  ، ه هي المسقط العمودي للنقطة أ على (ب ح) ، المستقيم (أ ه) يقطع (ك) في ز .

(1) احسب ب ح ، أ ه ، ح ه .

(2) احسب أ ز ، ب ز ، ح ز .

9. أ ب ح مثلث حيث  $أب = 3\sqrt{2}$  ،  $أح = 5\sqrt{2}$  ،  $ب ح = 2\sqrt{4}$

(1) بين أن المثلث أ ب ح قائم في أ .

(2) ه هي المسقط العمودي للنقطة أ على (ب ح) ، ز هي المسقط العمودي للنقطة

ه على (أ ح) .

- بين أن النسبتين  $\frac{أ ه}{ب ه}$  ،  $\frac{ح ه}{أ ب}$  متساويتان .

- احسب القيمة المشتركة لهما .

10. (د) دائرة مركزها م وقطرها [أب] حيث  $أب = 10$  ،

[أ ح] وتر طوله 8 ، ه هي المسقط العمودي للنقطة ح على (أ ب) .

(1) احسب ب ح ، ح ه .

(2) المماس للدائرة في ح يقطع (أ ب) في النقطة ز .

احسب كلاً من م ه ، م ز ، ح ز .

11. [أب] قطعة مستقيمة طولها 8 ؛ (د) دائرة قطرها [أب] ومركزها م. هـ = [أب]  
بحيث  $أه = 2$  ؛ المستقيم العمودي على (أب) في النقطة هـ يقطع الدائرة (د) في ح. د.

- (1) ما نوع المثلث أحم ؟
- (2) بين أن الرباعي أحم د معين.
- (3) ما نوع المثلث أحم ؟
- (4) احسب أحم ، حه ، حد .

(ش.ت.م 83)

12. أب ح مثلث متساوي الساقين رأسه الأساسي أ ، حيث  $ب = 8$  ، هـ هي المسقط العمودي للنقطة أ على (ب ح) حيث  $أه = 5$  . (د) هي الدائرة المحيطة بهذا المثلث ، المستقيم (أه) يقطع الدائرة (د) ثانية في أ' .  
(1) برهن أن المستقيم (أأ') هو مستقيم قطري للدائرة (د) ؛ ما نوع المثلث أبأ' ؟

(2) احسب أب ، أحم ثم نصف قطر الدائرة (د) .

13. أب ح د شبه منحرف قائم في أ و د حيث أب = أ د و  $د = 90^\circ$  .

- (1) برهن أن المثلث د ب ح متساوي الساقين.
- (2) نضع أب = ط احسب بدلالة ط كلاً من ب ح ، ح د ، أ ح ، ب د .
- (3) نضع  $[أح] \cap [ب د] = \{هـ\}$  . احسب بدلالة ط كلاً من  
هـ أ ، هـ ح ، هـ ب ، هـ د .
- (4) ل هي المسقط العمودي لالنقطة د على (أ ح) .  
احسب بدلالة ط : أ ل ، ح ل .

14. د (م ، ن) ، د' (م' ، ن') دائرتان متاستان خارجياً في النقطة ب ، (و) مماس مشترك لهما في النقطتين أ ، أ' والمماس المشترك لهما في النقطة ب يقطع (و) في ح  
1) برهن أن  $أ = أ' = ب = ب'$  ، واستنتج أن المثلث أبأ' قائم في ب  
(2) برهن أن المثلث م ح م' قائم في ح .  
(3) احسب بدلالة ن ، ن' كلاً من الأطوال ح ب ، ح م ، ح م'

(4) يبين أن  $4 = 2^2$  ، 'نق'

(5) يبين أنه إذا كان  $ص = 'و$  ، فإن  $ح م = 'ح م = 2\sqrt{و}$  .

15. ا ب ح مثلث قائم في ا ، [ ا ز ] عمود له . ه ، ك هما المسقطان العموديان للنقطة ز على ( ا ب ) و ( ا ح ) على الترتيب .

(1) برهن أن  $ز ب^2 + ز ح^2 = ح م^2 - 2 ا ز^2$  و  $ز ه^2 + ز ك^2 = ا ز^2$  .

(2) استنتج أن  $ب ه^2 + ح ك^2 + 3 ا ز^2 = ح م^2$  .

16. ا ب ح مثلث قائم في ا ، ه هي المسقط العمودي للنقطة ا على ( ب ح ) .

(1) يبين أن  $\frac{ا ب^2}{ا ح^2} = \frac{ا ب ه}{ا ح ه}$  .

(2) يبين أن  $ا ب^2 \times ا ه^2 = ا ح^2 \times ب ه^2$  .

(3) استنتج أن  $\frac{1}{ا ه^2} = \frac{1}{ا ح^2} + \frac{1}{ا ب^2}$  .

17. ا ب ح مثلث [ ا ه ] عمود متعلق بالضلع [ ب ح ] م منتصف [ ب ح ]

(1) برهن أن  $ا ب^2 = ا ح^2 + م ا^2 - ب ه^2 - ح م^2$

وأن  $ا ح^2 = م ا^2 + ح ه^2 - م ه^2$  .

(2) نضع  $ب ه = م + م$  و  $ح ه = ح م + م ه$  .

استنتج من السؤال (1) أن :

$ا ب^2 = م ا^2 + ب م^2 + 2 م \times م ه$  وأن  $ا ح^2 = م ا^2 + ح م^2 + 2 م \times م ه$  .

(3) استنتج أن :  $ا ب^2 + ا ح^2 = م ا^2 + 2 م \times م ه$

وأن  $ا ب^2 - ا ح^2 = 2 م \times ح م$  .

18. ا ب ح مثلث حيث  $\widehat{ب} = 120^\circ$  ،  $\widehat{ح} = 45^\circ$  ، [ ا ه ] عمود متعلق بالضلع

[ ب ح ] ، ط ، ل هما طولوا الضلعين [ ح ا ] ، [ ا ب ] على الترتيب .

(1) احسب بدلالة ل طول كل من [ ب ه ] ، [ ا ه ] .

(2) ما نوع المثلث ا ه ح ؟ استنتج علاقة بين ط و ل .

19.  $\widehat{AB} = 60^\circ$  شبه منحرف قائم في  $A$  و  $D$  حيث  $\widehat{AB} = 60^\circ$  ،

$\widehat{CD} = 90^\circ$  و  $AB = 8$  ط ( ط عدد حقيقي موجب ) .

احسب بدلالة ط طول القطر  $[CD]$  وطول كل من أضلاع شبه المنحرف .  
واحسب كذلك القطر  $[AC]$  .

20.  $\widehat{AB} = 60^\circ$  مثلث قائم في  $A$  حيث  $AB = 6$  ؛  $AC = 8$  ( وحدة الطول هي المستمر ) .  
(1) احسب طول الضلع  $[BC]$  .

(2)  $D$  نقطة من المستوى بحيث الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع ،  $E$  منتصف القطعة  $[AC]$  ؛ المستقيم الذي يشمل النقطة  $E$  ويوازي  $(AB)$  يقطع الضلع  $[BC]$  في  $F$  .

- احسب محيط متوازي الأضلاع  $ABCD$  .

- احسب طول القطعة  $[EF]$  .

(3) احسب طول القطر  $[BD]$  لمتوازي الأضلاع  $ABCD$  .

( من ش.ت.م 1983 )

21.  $[AB]$  قطعة مستقيمة طولها 8 ( وحدة الطول هي المستمر )

(د) هي الدائرة التي قطرها  $[AB]$  ومركزها  $M$  ؛  $H$  نقطة من  $[AB]$  بحيث  $AH = 2$  .  
المستقيم العمودي على  $(AB)$  في  $H$  يقطع الدائرة (د) في النقطتين  $E$  ،  $F$  .

(1) قارن بين  $AE$  و  $MF$  ما هو طول القطعة  $[AF]$  ؟

(2) بين أن الرباعي  $AEMF$  هو معين .

(3) احسب طول القطعة  $[EF]$  .

(4) بين أن  $HE^2 = HF^2 \times AB$

( من ش.ت.م 1983 )

22. د (م ، 5) دائرة ،  $E$  نقطة من المستوي بحيث  $ME = 7$  .

(و) مستقيم يشمل  $E$  ويقطع (د) في النقطتين  $A$  ،  $B$  بحيث تكون النقطة  $A$  منتصف  $[EB]$  .  
احسب طول الوتر  $[AB]$  .

23. د (م ، 4,5) دائرة ،  $E$  نقطة من المستوي بحيث  $ME = 3,5$  .



- (1) [أ ب] وتر يشمل د بحيث د = 3 د ب ، احسب أ ب .  
 (2) احسب المسافة بين مركز الدائرة والوتر [أ ب] .

24. د (م ، 6) دائرة ، أ نقطة من المستوى بحيث م = 2 ، الدائرة ه (أ ، 5) تقطع الدائرة (د) في النقطتين ب ، ب' ، والمستقيمان (أ ب) ، (أ ب') يقطعان (د) في النقطتين ح ، ح' على الترتيب .

- (1) برهن على تقايس الوترين [ب ح] ، [ب' ح'] من الدائرة (د) .  
 (2) احسب الطول المشترك لهذين الوترين .  
 (3) المستقيم العمودي على (م أ) في م يقطع الدائرة (د) في النقطتين د و د' ، ويقطع الدائرة (ه) في النقطتين ه ، ه' .  
 بين أن للمثلثين أ ه د ، أ ه' د' نفس المساحة ثم احسب هذه المساحة .  
 25. د (م ، ٣) دائرة ، [أ ب] قطر لها . (س س') مماس لها في النقطة ب . النقطة ح هي منتصف [م ب] .

- (1) ك نقطة من (أ ب) بحيث ك ≠ [ب أ] ، أ ك × أ ح = 4 س<sup>2</sup> .  
 احسب أ ك بدلالة س .

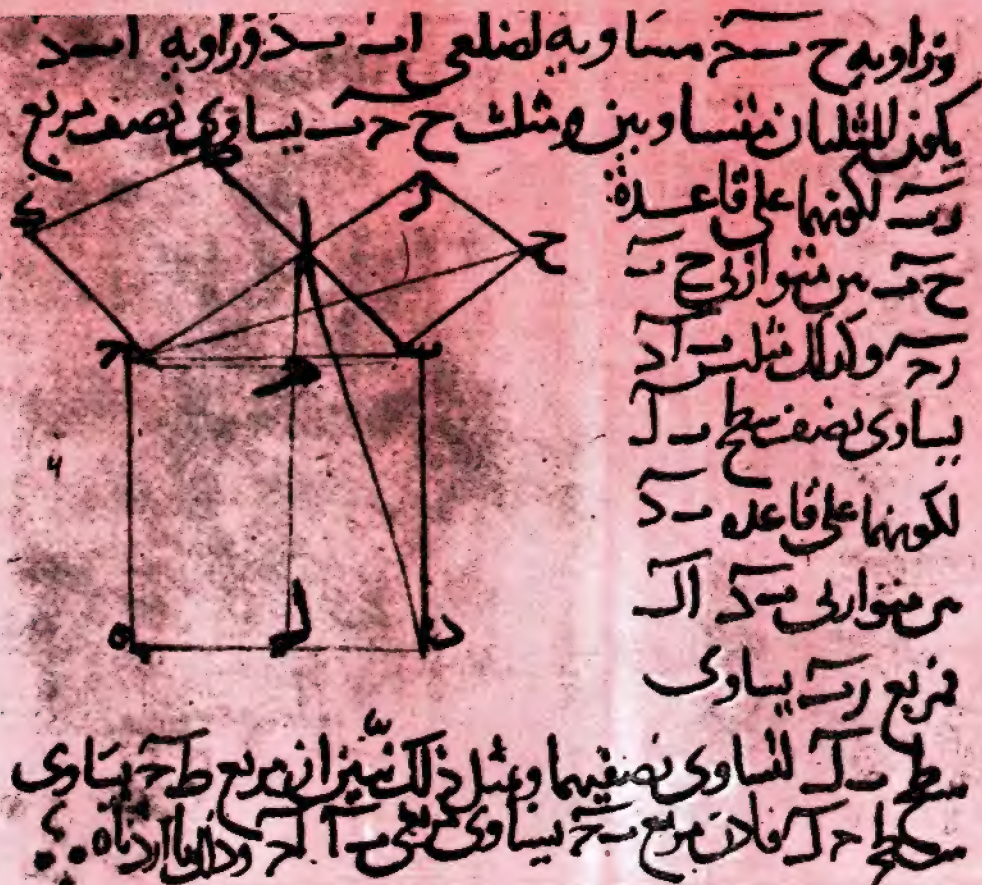
- (2) ل نقطة من [ب س و ل' نظيرة ل بالنسبة إلى (أ ب) ، (أ ل) و (أ ل') يقطعان (د) في النقطتين د ، د' .  
 برهن أن أ د × أ ل = أ ل' × أ ل' = 4 س<sup>2</sup> . استنتج أن (د د') // (ل ل') .  
 (3) برهن أن الرباعي د د' ل' ل دائري .  
 (4) و نقطة من (د) بحيث (ح و) ⊥ (أ ب) .  
 احسب ح و بدلالة س .

## فیثاغورث

فيلسوف ورياضي إغريقي من القرن السادس قبل الميلاد ولد بجزيرة ساموس ،  
في بحر إيجه وقد سافر كثيراً وخاصة إلى مصر وفارس والهند . أسس مدرسة اشتهرت  
بالمدرسة الفثاغورية .

اقترن اسمه بالعلاقة المترية الآتية :

”مساحة المربع المنشأ على وتر مثلث قائم تساوي مجموع مساحتي المربعين المنشأين على الضلعين القائمين.“ مع أنها عرفت قبله في كل من مصر والصين . وقد استعمل العرب هذه العلاقة المترية ، والصفحة الآتية تبين ذلك .



## حساب المثلثات

• حساب المثلثات هو أحد فروع الرياضيات ، ويبحث في العلاقات بين أطوال أضلاع مثلث وأقياس زواياه ، والتعبير عن هذه العلاقات في شكل معادلات يمكن بحلها - إيجاد الأطوال وأقياس الزوايا .

• ويدخل علم المثلثات في ميادين شتى كالهندسة البحرية والمدنية وفي الفلك والفيزياء ، وبدون هذا العلم تصبح هذه العلوم أكثر تعقيداً .

• ويعتمد علم المثلثات على أربع نسب مثلثية أساسية هي :  
« الجيب » و « جيب التمام » و « الظل » و « ظل التمام » .

أول من استخدم النسبة « جيب زاوية » هم الهنود ، أما النسب المثلثية الأخرى فقد عرفت لأول مرة في تاريخ هذا العلم على يد علماء مسلمين أمثال : أبو الوفاء البوزجاني ونصر الدين الطوسي والبتاني ، وبذلك وضع هؤلاء العلماء أسس هذا العلم ، ثم انتقل منهم عن طريق الأندلس إلى أيدي علماء الرياضيات في أوروبا .  
• وهكذا ظل هذا العلم يتطور حتي أصبح في وقتنا الحاضر شاملاً لمعظم العلوم فصار لا غنى عنه في جميع الأبحاث والميادين العلمية .



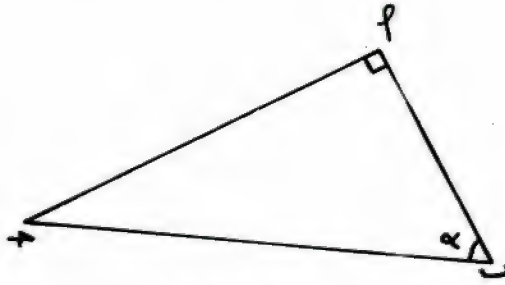
## مفاهيم أولية في حساب المثلثات

13

1. النسب المثلثية لزاوية حادة في مثلث قائم :

تعرفنا سابقاً على جيب تمام زاوية حادة كنسبة ثابتة تتعلق بقياس هذه الزاوية . وبصفة خاصة : جيب تمام زاوية حادة قياسها  $\alpha$  في مثلث قائم  $\Delta ABC$  وتره  $[AB]$  يساوي نسبة طول الضلع المجاور إلى طول الوتر ( الشكل 1 )

$$\text{أي : } \cos \alpha = \frac{AC}{AB}$$



الشكل 1

هذه النسبة تسمى نسبة مثلثية للزاوية الحادة التي قياسها  $\alpha$  .  
• نوجد نسب أخرى تتعلق بهذه الزاوية وهي :

$$\frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} \text{ وتسمى أيضاً نسباً مثلثية .}$$

- النسبة  $\frac{AC}{BC}$  تسمى جيب الزاوية التي قياسها  $\alpha$

$$\text{ونكتب : } \sin \alpha = \frac{AC}{BC}$$

- النسبة  $\frac{ا}{ب}$  تسمى ظل الزاوية التي قياسها  $\alpha$ .

$$\boxed{\frac{ا}{ب} = \alpha \text{ ظل}} \quad \text{ونكتب :}$$

- النسبة  $\frac{ب}{ا}$  تسمى ظل تمام الزاوية التي قياسها  $\alpha$ .

$$\boxed{\frac{ب}{ا} = \alpha \text{ تظل}} \quad \text{ونكتب :}$$

خلاصة :

إذا كان  $\alpha$  هو قياس زاوية حادة في مثلث قائم فإن :

$$\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \alpha \text{ جب}$$

$$\frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \alpha \text{ تجب}$$

$$\frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \alpha \text{ ظل}$$

$$\frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الضلع المقابل}} = \alpha \text{ تظل}$$

ملاحظة :

إذا كان طول وتر المثلث القائم  $ا ب ح$  هو وحدة الطول

أي  $ح = 1$  فإن :

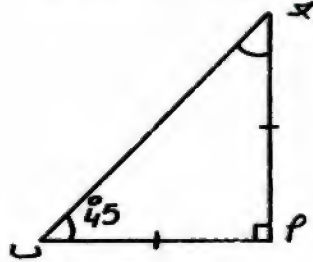
$$\text{جب } \alpha = \frac{ا}{ح} = ا \quad \text{وتجب } \alpha = \frac{ب}{ح} = ب$$



## 2. النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة :

(1) النسب المثلثية للزاوية التي قياسها  $45^\circ$  :

أب ح مثلث قائم في أ حيث  $\widehat{A} = \widehat{B} = 45^\circ$



الشكل 2

نستنتج من ذلك أن  $AB = AC$ .

وحسب نظرية فيثاغورث يكون :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow AB^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\frac{AB^2}{2} = \frac{1}{2} = \frac{AB}{2\sqrt{2}} = \frac{AB}{AB \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ$$

$$\frac{AB^2}{2} = \frac{1}{2} = \frac{AB}{2\sqrt{2}} = \frac{AB}{AB \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ$$

$\frac{AB}{2} = \sin 45^\circ = \cos 45^\circ$

نتيجة

$$1 = \frac{AB}{AB} = \frac{AB}{AB} = \tan 45^\circ$$

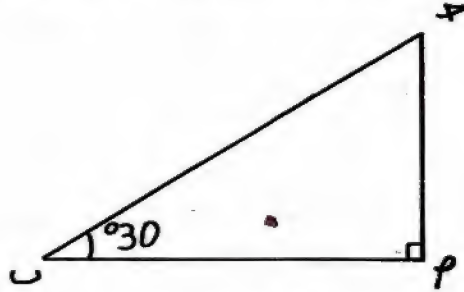
$$1 = \frac{AB}{AB} = \frac{AB}{AB} = \cot 45^\circ$$

$1 = \tan 45^\circ = \cot 45^\circ$

نتيجة

(2) النسب المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما  $30^\circ$  .  $60^\circ$  :

أب ح مثل قائم في أ حيث  $\angle A = 30^\circ$  . (الشكل 3)



الشكل 3

نستنتج أن  $\angle C = 60^\circ$  .

حسب نظرية فيثاغورث لدينا :

$$\sqrt{3} \times \text{أب} = \text{أح} \text{ و } \frac{1}{2} \times \text{أح} = \text{أب}$$

$$\text{أح} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \left( \text{أح} \times \frac{1}{2} \right) = \text{أب}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \text{أح}}{\text{أح}} = \frac{\text{أب}}{\text{أح}} = \sin 30^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \text{أح}}{\text{أح}} = \frac{\text{أب}}{\text{أح}} = \sin 60^\circ$$

نتيجة :  $\sin 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{\sqrt[3]{3} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = {}^{0}60 \text{ جب}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{\sqrt[3]{3} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = {}^{0}30 \text{ تجب}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt[3]{3}}{2} = {}^{0}30 \text{ تجب} = {}^{0}60 \text{ جب}} : \text{نتیجہ}$$

$$\sqrt[3]{3} = \frac{2}{1} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{\sqrt[3]{3} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = {}^{0}60 \text{ ظل}$$

$$\sqrt[3]{3} = \frac{2}{1} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2}}{\sqrt[3]{3} \times \frac{\sqrt[3]{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = {}^{0}30 \text{ تظل}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{3} = {}^{0}30 \text{ تظل} = {}^{0}60 \text{ ظل}} : \text{نتیجہ}$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \frac{1}{2}}{\sqrt[3]{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = {}^{0}30 \text{ ظل}$$

نتيجة : ظل  $30^\circ =$  ظل  $60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

### نتائج :

ظل 90° و تظل 0° غیر موجودین .

ملاحظة :

• رأيت أنه :

إذا كان  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  فإن  $\sin \alpha \in [0, 1]$

وأيضاً :

إذا كان  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  فإن  $\cos \alpha \in [0, 1]$

نقبل أنه : إذا كان  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$  فإن  $\tan \alpha \in [0, +\infty]$

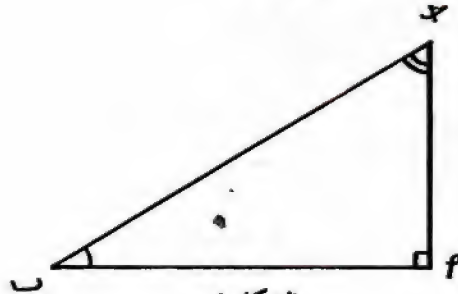
نلخص النتائج السابقة في الجدول الآتي :

النسب المثلثية الأقياس بالدرجات	الجيب	جيب تمام	الظل	ظل تمام
$0^\circ$	0	1	0	غير موجود
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90^\circ$	1	0	غير موجود	0



3. العلاقة بين النسب المثلثية لزاويتين متتامتين :

ا ب ج مثلث قائم في ا ( الشكل 4 )



الشكل 4

لدينا  $\hat{A} = 90^\circ$  إذن  $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$

$$\frac{AB}{BC} = \hat{C} \text{ لدينا ج ب } \hat{C}$$

$$\frac{AB}{BC} = \hat{B} \text{ و نجب } \hat{B}$$

نستنتج أن  $\boxed{\hat{C} = \text{جب } \hat{B} = \text{نجب } \hat{B}}$

$$\frac{AC}{BC} = \hat{B} \text{ وأيضا ظل } \hat{B}$$

$$\frac{AC}{BC} = \hat{C} \text{ و تظل } \hat{C}$$

نستنتج أن  $\boxed{\hat{B} = \text{ظل } \hat{C} = \text{تظل } \hat{C}}$

إذا كان  $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$  فإن  $\text{جب } \hat{B} = \text{نجب } \hat{C}$  و  $\text{ظل } \hat{B} = \text{تظل } \hat{C}$   
أي  $\text{جب } \hat{B} = \text{نجب } (90^\circ - \hat{B})$  و  $\text{ظل } \hat{B} = \text{تظل } (90^\circ - \hat{B})$

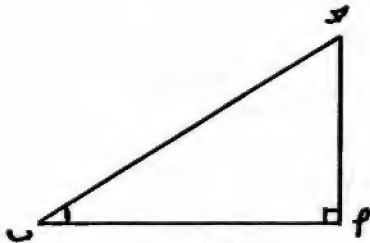
في مثلث قائم :

- جيب زاوية حادة يساوي جيب تمام الزاوية المتممة لها .
- ظل زاوية حادة يساوي ظل تمام الزاوية المتممة لها .

رأيت مثلاً أن جب  $30^\circ = \text{تجب } 60^\circ$  وأن ظل  $30^\circ = \text{تظل } 60^\circ$  .

#### 4. العلاقات بين النسب المثلثية لزاوية حادة :

أ ب ح مثلث قائم في أ ، ( الشكل 5 )  
دعنا أن :



الشكل 5

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \text{جب ح}$$

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \text{وتجب ح}$$

لاحظ أن  $\angle \text{ح} \neq 90^\circ$  إذن  $\text{تجب ح} \neq 0$  .

$$\text{فيكون } \frac{\text{جب ح}}{\text{تجب ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} \div \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ح}} \times \frac{\text{أ ح}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ح}}{\text{أ ب}} = \text{ظل ح} .$$

$$\boxed{\text{أي } \frac{\text{جب ح}}{\text{تجب ح}} = \text{ظل ح}}$$

$$\text{ملاحظة : } \text{ظل } 0^\circ = \frac{\text{جب } 0^\circ}{\text{تجب } 0^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

• ولدينا حسب نظرية فيثاغورث :

$$\text{أ ح}^2 = \text{أ ب}^2 + \text{ب ح}^2 \text{ ومنه } \frac{\text{أ ح}^2}{\text{ب ح}^2} = \frac{\text{أ ب}^2 + \text{ب ح}^2}{\text{ب ح}^2} \quad \text{جب } 37^\circ = 0.6018$$

$$1 = \left( \frac{a}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \text{ أي } 1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$$

وهذا يعني أن :  $1 = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)$   
نكتب  $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$  و  $\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$ .

$$\text{فيكون : } \boxed{1 = \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}$$

$$\bullet \text{ لدينا ظل } \theta = \frac{a}{b} \text{ و تظل } \theta = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \text{ وبما أن ظل } \theta = \frac{a}{b}$$

$$\text{فإن } \boxed{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}}$$

$$\text{ملاحظة : تظل } 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{0}{1} = 0$$

5. استعمال الجداول المثلثية :

رأيت في الفقرة 2 . جدولاً للنسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة . وسنجد في نهاية الكتاب جدولين خاصين بالنسب المثلثية للزوايا التي أقياسها محصورة بين  $0^\circ$  و  $90^\circ$  أو بين 0 غر و 100 غر ، هذه النسب معطاة بقيم مقربة إلى  $\frac{1}{10^4}$  بالنقصان .

أمثلة :

$$(1) \text{ جب } 37^\circ = 0,6018 ; \text{ تجب } 27^\circ \text{ غر} = 0,4115 ; \text{ ظل } 49^\circ = 1,1504$$

- (2) العدد 0,8746 هو تـجـب 29° أو جـب 61° .  
 العدد 0,9004 هو ظل 42° أو تـظـل 48° .  
 العدد 0,2639 هو جـب 17° أو تـجـب 83° .

#### ملاحظة 1 :

نكتفي في هذه السنة بحساب النسب المثلثية لزوايا حادة أقياسها بالدرجات أو بالفراة هي أعداد طبيعية .

#### ملاحظة 2 :

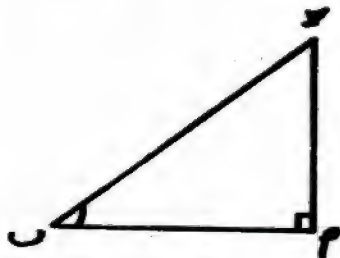
- لإيجاد النسب المثلثية للزوايا التي أقياسها من 0° إلى 45° أو (من 0° إلى 50°) نقرأ الجدول من الأعلى إلى الأسفل .
- لإيجاد النسبة المثلثية للزوايا التي أقياسها من 45° إلى 90° أو (من 50° إلى 100°) نقرأ الجدول من الأسفل إلى الأعلى .

#### 6. إيجاد طول ضلع في مثلث قائم :

أبـ = مثلث قائم في أ .

لنحسب طول أحد ضلعيه القائمين (مثلاً أبـ) بدلالة نسبة مثلثية لإحدى زاويتي الحادتين :

$$\bullet \text{ لدينا : } \hat{A} = \frac{ab}{ac} \text{ و } \hat{B} = \frac{ab}{bc} .$$



الشكل 6

$$\begin{aligned} \text{نستنتج أن : } ab &= \hat{A} \times ac \\ \text{و } ab &= \hat{B} \times bc \end{aligned}$$



• نجد أيضًا  $a = b \times \sin C$  و  $a = b \times \cos C$ .

في مثلث قائم :  
 طول ضلع قائم يساوي جداء طول الوتر وجيب قياس الزاوية المقابلة له .  
 ويساوي أيضًا جداء طول الوتر وجيب تمام قياس الزاوية المجاورة له .

أب ح مثلث قائم في أ و  $\hat{C} = 52^\circ$  .  
 - احسب أ ح بدلالة أ ب و ظل ح .

### 7. تطبيقات :

1) حساب بعض النسب المثلثية إذا علمت إحدى النسب المثلثية لها .  
 مثال 1 :

$$\begin{aligned}
 & [م س ، م ع] \text{ زاوية حادة حيث } \sin C = 0,829 \\
 & \text{ولنحسب } \cos C \text{ و } \tan C . \\
 & \text{نعلم أن : } \sin^2 C + \cos^2 C = 1 . \\
 & \text{أي : } \cos^2 C = 1 - (0,829)^2 \\
 & \text{ومنه } \cos C = \sqrt{1 - (0,829)^2} \\
 & \text{أو } \cos C = \sqrt{0,687241} \\
 & \text{ومنه } \cos C = 0,312759 \\
 & \text{أي } \cos C = 0,312759 \\
 & \text{ويكون } \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{0,829}{0,312759} = 2,650
 \end{aligned}$$



مثال 2 :

$\alpha$  هو قيس زاوية حيث ظل  $\alpha = 0,98$ .

- لنحسب جب  $\alpha$  و تـجب  $\alpha$ .

الحل :

$$\text{نعلم أن : } \frac{\text{جب } \alpha}{\text{تـجب } \alpha} = \text{ظل } \alpha$$

$$\text{فيكون : } \frac{\text{جب } \alpha}{\text{تـجب } \alpha} = 0,98$$

$$\text{وبتريع الطرفين نجد : } \frac{\alpha^2 \text{ جب}}{\alpha^2 \text{ تـجب}} = (0,98)^2$$

$$\text{أي } \frac{0,9604}{1} = \frac{\alpha^2 \text{ جب}}{\alpha^2 \text{ تـجب}}$$

وحسب خواص التناسب يمكن أن نكتب :

$$\frac{\alpha^2 \text{ جب} + \alpha^2 \text{ تـجب}}{1 + 0,9604} = \frac{\alpha^2 \text{ تـجب}}{1} = \frac{\alpha^2 \text{ جب}}{0,9604}$$

$$\text{ومنه } \frac{1}{1,9604} = \frac{\alpha^2 \text{ جب}}{0,9604}$$

$$\text{أي جب } \alpha^2 = \frac{0,9604}{1,9604} = 0,4899$$

$$\text{نستنتج أن جب } \alpha = \sqrt{0,4899} = 0,69$$

$$\text{ونعلم أن تـجب } \alpha^2 = 1 - \alpha^2 \text{ جب} = 1 - 0,4899 = 0,5101$$

$$\text{نستنتج أن تـجب } \alpha = \sqrt{0,5101} = 0,71$$

(2) إنشاء زاوية علمت إحدى نسبها المثلثية :

مسألة 1 :

- لننشئ زاوية حادة  $[م س ، م ع]$  حيث نجب  $س م ع = ل$  (ل عدد حقيقي).
- نعلم أن جيب تمام زاوية حادة محصور بين 0 ، 1 .
- فإذا كان  $ل > 0$  فالإنشاء غير ممكن .
- وإذا كان  $ل < 1$  فالإنشاء غير ممكن أيضًا .
- إذا كان  $ل = 0$  فالزاوية  $[م س ، م ع]$  التي نريد إنشاءها هي زاوية قائمة .
- وإذا كان  $ل = 1$  فالزاوية  $[م س ، م ع]$  معدومة .
- وإذا كان  $0 < ل < 1$  فالزاوية  $[م س ، م ع]$  يمكن إنشاؤها كما سنرى في المثال

الآتي :

$$\star \text{ لَنأخذ نجب } س م ع = \frac{3}{4}$$

- نرسم زاوية قائمة  $[م س ، م ص]$  ثم نرسم ربع دائرة مركزها م ونصف قطرها وحدة الطول بحيث تقطع  $[م س و]$  في النقطتين  $أ$  ،  $ب$  على التوالي .

$$\text{- نعين النقطة } ح \text{ من } [م أ] \text{ بحيث } م ح = \frac{3}{4}.$$

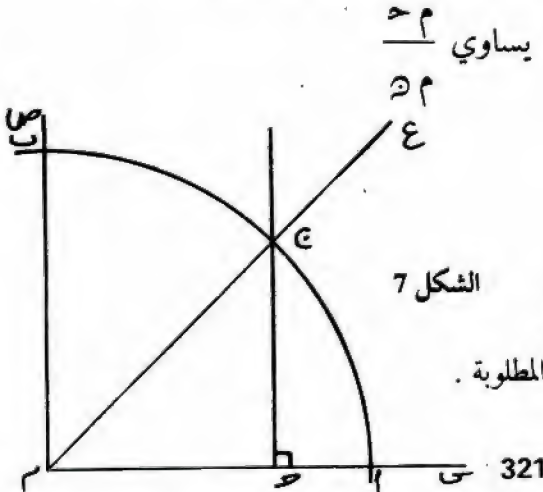
- نرسم المستقيم الذي يشمل ح ويعامد  $[م س]$  فيقطع ربع الدائرة في نقطة د .
- نرسم نصف المستقيم  $[م ع]$  الذي يشمل د ، فنحصل على الزاوية

$$[م س ، م ع] \text{ التي جيب تمامها يساوي } \frac{3}{4}$$

$$\text{لكن } م ح = \frac{3}{4} \text{ و } م د = 1$$

$$\text{إذن } \frac{3}{4} = \frac{م ح}{م د} \text{ أي نجب } س م ع = \frac{3}{4} \text{ الشكل 7}$$

فالزاوية  $[م س ، م ع]$  هي الزاوية المطلوبة .



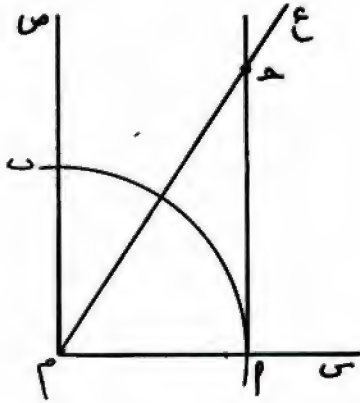
## مسألة 2 :

- لننشئ زاوية حادة  $[م س، م ع]$  بحيث ظل  $س م ع = ك$  (ك عدد حقيقي)  
 نعلم أن ظل زاوية حادة هو عدد حقيقي موجب .  
 • فإذا كان  $ك > 0$  فالإنشاء مستحيل .  
 • وإذا كان  $ك = 0$  فالزاوية  $[م س، م ع]$  معدومة .  
 • وإذا كان  $ك < 0$  يمكن إنشاء الزاوية الحادة  $[م س، م ع]$  كما سنرى في المثال

الآتي :

★ لنأخذ ظل  $س م ع = 1,5$  .

- نرسم زاوية قائمة  $[م س، م ص]$  .  
 - نرسم ربع دائرة مركزها م ونصف قطرها وحدة الطول تقطع  $[م س و [م ص$  في النقطتين  $أ، ب$  على التوالي .



الشكل 8

- نرسم من النقطة  $أ$  عموداً على  $[م س$  (مماس الدائرة في  $أ$ ) ونعيّن عليه نقطة  $ح$  بحيث  $أ ح = 1,5$  .  
 - نرسم نصف مستقيم  $[م ع$  الذي يشمل  $ح$  .  
 • في المثلث القائم  $م أ ح$  لدينا :

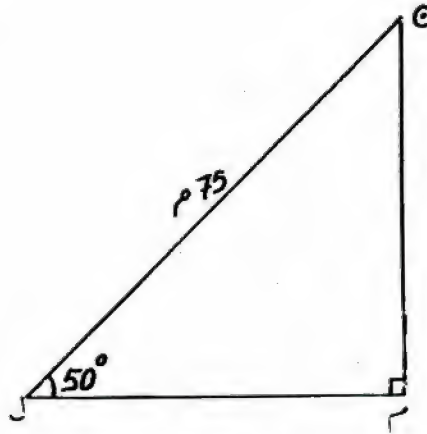
$$\text{ظل } أ م ح = \frac{أ ح}{أ م} = \frac{1,5}{1} = 1,5$$

فالزاوية  $[م س، م ع]$  هي الزاوية المطلوبة .

(3) حل بعض المسائل :

## مسألة 1 :

- يلعب طفل بطائرة من الورق مربوطة بخيط مشدود طوله 75 م ويميل على الأفق بزاوية  $50^\circ$  . (الشكل 9)  
 لنحسب ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض .



الشكل 9

الحل :

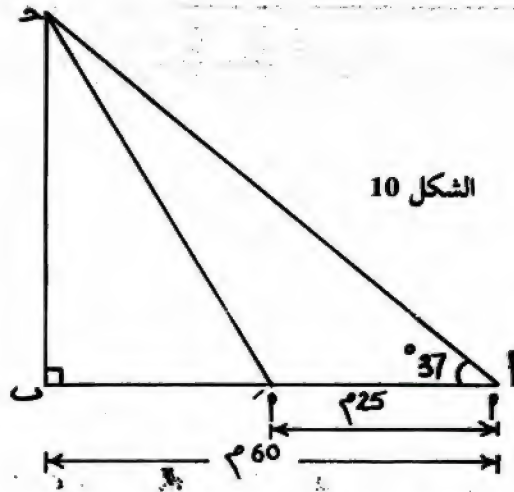
$$\begin{aligned} \widehat{AB} \times \widehat{BC} &= 75 \times \widehat{BC} = 75 \times \widehat{BC} \times \sin 50^\circ \\ \widehat{BC} &= 75 \times \sin 50^\circ \\ \widehat{BC} &= 75 \times 0,7660 \\ \widehat{BC} &= 57,45 \text{ م} \end{aligned}$$

أي أن ارتفاع الطائرة عن سطح الأرض يساوي 57,45 م .

مسألة 2 :

رأى راصد من نقطة أ على سطح الأرض برجاً يبعد عن أ مسافة 60 م وبزاوية قياسها  $37^\circ$  . ( الشكل 10 ) .

- الزاوية [ أ ب ، أ ج ] تسمى زاوية الارتفاع .
- ورأى راصد آخر نفس البرج من نقطة أ' تقع بين أ و ب وتبعد عن أ مسافة 25 م .
- لنحسب ارتفاع البرج ، وقيس زاوية ارتفاع الراصد الثاني .



الحل :

- في المثلث  $\triangle ABC$  القائم في  $C$  لدينا :

$$\frac{BC}{AC} = \tan 37^\circ \text{ ومنه } BC = AC \times \tan 37^\circ$$

نجد في جدول النسب المثلثية أن  $\tan 37^\circ = 0,7536$

$$BC = 0,7536 \times 60 = 45,216$$

إذن ارتفاع البرج يساوي 45,216 م

- في المثلث  $\triangle ABC$  القائم في  $C$  لدينا :

$$\frac{BC}{AC} = \tan \hat{A}$$

$$\text{لكن } \hat{A} = 180^\circ - 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$$

$$BC = AC \times \tan 53^\circ \Rightarrow 45,216 = AC \times \tan 53^\circ$$

نجد في جدول النسب المثلثية أن :

$$1,2799 < 1,2918 < \tan 52^\circ < \tan 53^\circ$$

نقبل أن  $52^\circ < \hat{A} < 53^\circ$

نأخذ  $\hat{A} \approx 52^\circ$

إذن قياس زاوية ارتفاع الراصد الثاني هو  $52^\circ$  تقريباً .



## تمارين

1. أ) عَيِّن من بين الأعداد الحقيقية ، الأعداد التي يمكن أن تكون جيوب التمام لزوايا حادة :

$$1,5, \frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{15}{17}, \frac{13}{11}, \frac{3}{4}, 5, \frac{1}{2}$$

ب) هل يمكن أن يكون العدد الحقيقي  $\frac{7\sqrt{3}}{8}$  هو جيب تمام زاوية .

علماً بأن  $2.645 = 7\sqrt{3}$  .  
في التمارين الآتية وحدة الطول هي السمتير .

2. أ ب ح مثلث قائم في أ حيث  $AB = 4,5$  و  $\widehat{B} = \frac{28}{53}$  .  
- احسب ب ح ، أ ح .

3. أ ب ح مثلث قائم في أ حيث  $AB = 7$  ،  $\widehat{B} = \frac{4}{5}$  .  
احسب كلاً من أ ب ، أ ح ،  $\widehat{B}$  ،  $\widehat{C}$  ، ظل  $\widehat{B}$  .

4. أ ب ح مثلث قائم في أ حيث  $AB = 8$  ،  $\widehat{B} = \frac{15}{8}$  .  
- احسب كلاً من أ ب ، أ ح ،  $\widehat{B}$  ،  $\widehat{C}$  ،  $\widehat{A}$  .

5. أ ب ح مثلث متساوي الساقين حيث  $AB = AC = 12$  ،  $\widehat{A} = 120^\circ$  .  
- عَيِّن طول القاعدة [ ب ح ] ثم احسب الارتفاع أ ه بطريقتين .

6. أ ب ح مثلث حيث  $AB = \frac{70\sqrt{3}}{3}$  ،  $BC = \frac{20\sqrt{3}}{3}$  ،  $AC = 10\sqrt{3}$  .

(1) بَيِّن أن المثلث أ ب ح قائم  
(2) احسب كلاً من  $\widehat{B}$  ،  $\widehat{C}$  ،  $\widehat{A}$  ،  $\widehat{B}$  ، ظل  $\widehat{A}$  ، ظل  $\widehat{B}$  ،  $\widehat{C}$  .

7. ارسم مثلثاً  $أ ب ح$  حيث  $أ ب = 6$  ؛  $أ ح = 4$  ،  $\hat{أ} = 60^\circ$  .  
 [ ب هـ ] ، [ ح ك ] هما العمودان المتعلقان بالضلعين [ أ ح ] ، [ أ ب ] على التوالي .  
 احسب (1)  $أ هـ$  ،  $ب هـ$  ،  $ح هـ$  ،  $ب ح$  .  
 (2)  $أ ك$  ،  $ح ك$  ،  $ب ك$  .
8. عيّن باستخدام جدول النسب المثلثية ما يلي :  
 (أ) جيوب الزوايا التي أقياسها :  
 $23^\circ$  ،  $32^\circ$  ،  $35^\circ$  ،  $58^\circ$  ،  $25^\circ$  ،  $79^\circ$  غر .  
 (ب) جيوب تمام الزوايا التي أقياسها :  
 $15^\circ$  ،  $76^\circ$  ،  $84^\circ$  ،  $50^\circ$  غر .  
 (ح) ظلال الزوايا التي أقياسها .  
 $27^\circ$  ،  $32^\circ$  ،  $45^\circ$  ،  $50^\circ$  ،  $68^\circ$  غر .
9.  $أ ب ح$  مثلث قائم في  $أ$  حيث  $ب ح = 6$  ،  $\hat{أ ب ح} = 36^\circ$  .  
 - احسب  $أ ب$  ،  $أ ح$  .
10. تحلق طائرة على ارتفاع 1000 م . ما هو بعدها عن برج المراقبة إذا كانت تُرى من البرج بزاوية قياسها  $20^\circ$  ؟
11. (د) دائرة طول قطرها 12 ، [ أ ب ] وتر يشد قوساً قياسها  $60^\circ$  .  
 (1) ما هو طول الوتر [ أ ب ] ؟  
 (2) عيّن المسافة بين مركز الدائرة والوتر [ أ ب ] .
12.  $\alpha$  هو فيس زاوية حاده .  
 (1) عيّن  $\alpha$  بالدرجات في كل من الحالات الآتية .  
 جب  $\alpha = 0,4226$  ؛ تجب  $\alpha = 0,8290$  ؛ ظل  $\alpha = 0,9657$  ؛  
 تظل  $\alpha = 1,1918$  .  
 (2) عيّن  $\alpha$  بالغرادات في كل من الحالات الآتية :  
 جب  $\alpha = 0,2334$  ؛ تجب  $\alpha = 0,7705$  ؛ ظل  $\alpha = 1,5224$  ؛  
 تظل  $\alpha = 4,1653$  .

13.  $\alpha$  ب ح و مستطيل بعده 100 ، 80، 12 ومركز تناظره م .  
عين بالفرادات قيس الزاوية [ م ، ا ، م ب ] .

14.  $\alpha$  ب ح مثلث قائم في ا حيث  $\alpha = 4^\circ$  ،  $\alpha = 30^\circ$  .  
(1) عين ح .

(2) احسب  $\alpha$  ب ، م ح .

$$(3) \text{ بين أن } \frac{1 - \text{تج} \alpha}{\text{جب} \alpha} = \frac{\text{جب} \alpha}{1 + \text{تج} \alpha}$$

$$\text{وأن تظل}^2 \alpha - \text{تج}^2 \alpha = \text{تظل}^2 \alpha \times \text{تج}^2 \alpha$$

15. احسب جب  $\alpha$  في كل من الحالات الآتية حيث  $\alpha$  هو قيس زاوية حادة :

$$(1) \text{ تج} \alpha = \frac{3}{4} , (2) \text{ تج} \alpha = \frac{7}{8} , (3) \text{ تج} \alpha = \frac{2}{3} , (4) \text{ تج} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

16. احسب تج  $\alpha$  في كل من الحالات الآتية حيث  $\alpha$  هو قيس زاوية حادة :

$$(1) \text{ جب} \alpha = \frac{11}{13} , (2) \text{ جب} \alpha = \frac{3}{5} , (3) \text{ جب} \alpha = \frac{17}{20}$$

17.  $\alpha$  هو قيس زاوية .

هل يمكن أن يكون :

$$(1) \text{ جب} \alpha = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{6}}{4} ; \text{ تج} \alpha = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$(2) \text{ جب} \alpha = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{7}}{15} ; \text{ تج} \alpha = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{15}$$

(ملاحظة : الإجابة تكون بحساب جب  $\alpha^2$  + تج  $\alpha^2$ )

18.  $\alpha$  هو قيس زاوية حادة ، برهن ما يلي :

$$(1) (\text{جب} \alpha + \text{تج} \alpha)^2 = 1 + 2 \text{ جب} \alpha \text{ تج} \alpha$$

$$(2) 2 = (\text{جب} \alpha + \text{تج} \alpha)^2 + (\text{جب} \alpha - \text{تج} \alpha)^2$$

19. تحقق أن :

$$(1) \text{ جب } (30^\circ + 60^\circ) = \text{جب } 30^\circ + \text{جب } 60^\circ$$

$$(2) \text{ جب } (30^\circ + 60^\circ) = \text{جب } 30^\circ - \text{جب } 60^\circ$$

20. احسب جب  $2\alpha$  ، جب  $2\alpha$  (  $\alpha$  هو قيس زاوية )

علمًا بأن جب  $(\beta + \alpha) = \text{جب } \alpha + \text{جب } \beta$  . جب  $\beta$

وأن جب  $(\beta + \alpha) = \text{جب } \alpha - \text{جب } \beta$  . جب  $\beta$

حيث  $\beta$  هو قيس زاوية .

21. أثنىء زاوية حادة قيسها  $\alpha$  في كل من الحالات الآتية :

$$\text{جب } \alpha = 64,28 \times 10^{-2} ; \text{جب } \alpha = 906,3 \times 10^{-3} ; \text{ظل } \alpha = 8098 \times 10^{-4}$$

22. أ ب ح مثلث قائم في أ حيث أ ب ، ب ح متناسبان مع العددين 3 ، 4 .

- احسب كلاً من جب  $\hat{A}$  ، جب  $\hat{B}$  ، ظل  $\hat{C}$  .

23. أ ب ح د مربع طول ضلعه ط . ننشئ داخل هذا المربع مثلثاً د ح ه متقايس الأضلاع .

(1) احسب بالدرجات قيس كل من زوايا المثلثين أ ه د ، أ ه ب .

(2) ك ، ل هما المسقطان العموديان للنقطة ه على الضلعين [ أ ب ] ، [ د ح ] على

الترتيب .

- احسب بدلالة ط كلاً من ه ل ، ه ك .

(3) احسب ظل ه أ ب .

24.  $\alpha$  قيس زاوية . برهن صحة المساويات الآتية :

$$\frac{1 - \text{جب } \alpha}{\text{جب } \alpha} = \frac{1 + \text{جب } \alpha}{\text{جب } \alpha}$$

$$\frac{1 - \text{جب } \alpha}{\text{جب } \alpha} = \frac{1 + \text{جب } \alpha}{\text{جب } \alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha^2 \text{تجب}} = \alpha^2 \text{ظل} + 1 \cdot$$

$$\cdot \text{ظل} \alpha^2 - \alpha^2 \text{جب} = \alpha^2 \text{ظل} \times \alpha^2 \text{جب} \cdot$$

$$\cdot \text{تظل} \alpha^2 - \alpha^2 \text{تجب} = \alpha^2 \text{تظل} \times \alpha^2 \text{تجب} \cdot$$

25.  $\alpha$  هو قياس زاوية حادة .

- احسب جب  $\alpha$  ، ظل  $\alpha$  في كل من الحالات الآتية :

$$\text{تجب} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} ; \text{تجب} \alpha = \frac{1}{4} ; \text{تجب} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

26.  $\alpha$  هو قياس زاوية حادة :

(1) عيّن  $\alpha$  بحيث يكون :

$$\frac{\alpha \text{تجب} + 3}{2} = \alpha \text{تجب} \frac{1}{2} + \alpha \text{تجب} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(2) \text{نفرض أن ظل } \alpha = \frac{5}{12}$$

$$\text{برهن أن } 144 \text{ جب}^2 \alpha - 25 \text{ تجب}^2 \alpha = 0 \cdot$$

- احسب جب  $\alpha$  ، تجب  $\alpha$  .

27. 1 ، 2 نقطتان متقابلتان قطرياً من دائرة مركزها م ونصف قطرها ن . نرسم وترين

[أب] . [سأ] بحيث :

$$\angle \text{أ} = 45^\circ ; \angle \text{س} = 30^\circ \cdot$$

(1) ما نوع المثلث أبس ؟

(2) احسب الطول أب بدلالة ن .

(3) ما نوع المثلث سمأ ؟

(من ش.ت.م 1981)



28.  $\widehat{AB} = 52^\circ$  ،  $\widehat{AC} = 12^\circ$  .

[أه] هو العمود المتعلق بالضلوع [ب ح] .

[أه] ، [ب ك] ، [ح د] هي متوسطات المثلث أ ب ح .

(1) احسب أه ، ه ح ، ه ب ، ب ح .

(2) احسب أه ، ب ك ، ح ك .

29.  $\widehat{AB} = 52^\circ$  ،  $\widehat{AC} = 64^\circ$  ،  $\widehat{BC} = 7^\circ$  .

[أ أ'] ، [ب ب'] هما العمودان المتعلقان بالضلعين [ب ح] ، [أ ح] على التوالي .

ه هي نقطة تقاطع أعمدة المثلث أ ب ح .

(1) احسب كلاً من أ أ' ، ب ب' ، أ ب' ، ب أ' .

(2) احسب ه أ' ، ه ب' .

30.  $\widehat{AB} = 120^\circ$  .

[ح ه] هو العمود المتعلق بالضلوع [أ ب] حيث  $\widehat{CH} = 10^\circ$  .

[ب ب'] هو العمود المتعلق بالضلوع [أ ح] .

(1) احسب كلاً من أ ب ، أ ح ، ب ح ، ب ب' .

(2) [ح س] هو المنصف الداخلي للزاوية [ح أ ب] ؛ [أ ع] هو المنصف

الداخلي للزاوية [أ ب ح] ، ل هي نقطة تقاطع [ح س] و [أ ع] .

احسب ل ه .

(3) ( $\Delta$ ) هو محور الضلع [أ ح] ، م هي نقطة تقاطع ( $\Delta$ ) و ( $\widehat{CH}$ ) .

احسب م أ .

31.  $\widehat{AB} = 6^\circ$  ،  $\widehat{AC} = 9^\circ$  .

د نقطة من الضلع [أ ح] بحيث  $\widehat{AD} = 4^\circ$  .

(1) احسب كلاً من ظل أ د ، ظل أ ح ، ظل ب ح ؛ تبج أ ب د .

(2) محور [ح د] يقطع المستقيمين (ب د) و (ب ح) في النقطتين

ل ، ك على الترتيب ، والنقطة ه هي منتصف [ح د] .

احسب ه ك ، ه ل .

استخرج جب ه ل و دون حساب د ل .

32.  $AB \perp AC$  قائم في  $A$ ، حيث  $AB = 3$ ،  $AC = 4$ . (ل طول معلوم)

(1) احسب طول الضلع  $[BC]$  بدلالة  $L$ .

(2)  $H$  موقع الارتفاع النازل من  $A$ .

احسب بدلالة  $L$  الأطوال  $AH$ ،  $AB$ ،  $AC$ .

(3) احسب جيب الزاوية  $[AH]$ .

(من ش. ت. م 1982 المنطقة الثانية)

33.  $AB \perp AC$  قائم في  $A$ ، النقطة  $H$  هي موقع الارتفاع المتعلق بالوتر  $[BC]$ ، طولاً

القطعتين  $[AB]$ ،  $[AC]$  هما على الترتيب  $3$  ط،  $\frac{12}{5}$  ط (ط هو طول مفروض).

(1) احسب بدلالة ط كلاً من  $AB$ ،  $AC$ ،  $BC$ .

(2) احسب ظل الزاوية  $[AC]$ .

(من ش. ت. م 1982 المنطقة الأولى)

34.  $K$  عدد حقيقي موجب؛  $\alpha$  قياس زاوية بالدرجات حيث  $45^\circ < \alpha$ .

$AB \perp AC$  قائم متساوي الساقين حيث  $AB = AC = K$  و  $\angle A = 2\alpha$ .

$[BH]$  هو العمود المتعلق بالضلع  $[AC]$ .

(1) احسب  $AB$  بدلالة  $K$  و  $\alpha$ .

(2) احسب  $BH$  بدلالة  $K$  و  $\alpha$  بطريقتين مستعملين:

مرة المثلث  $ABH$  ومرة المثلث  $BCH$ .

(3) استنتج من السؤال الثاني أن  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

(4) احسب كلاً من  $AB$ ،  $AC$ ،  $BC$  بدلالة  $K$ ،  $\alpha$ .

(ب) برهن أن  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ .

35.  $AB \perp AC$  قائم في  $A$  حيث  $AB = 3$  و  $AC = 6$ .

$H$  هو المسقط العمودي للنقطة  $A$  على  $(BC)$ .

(1) احسب  $AB$ ،  $AC$ ،  $BC$ ،  $AH$ .

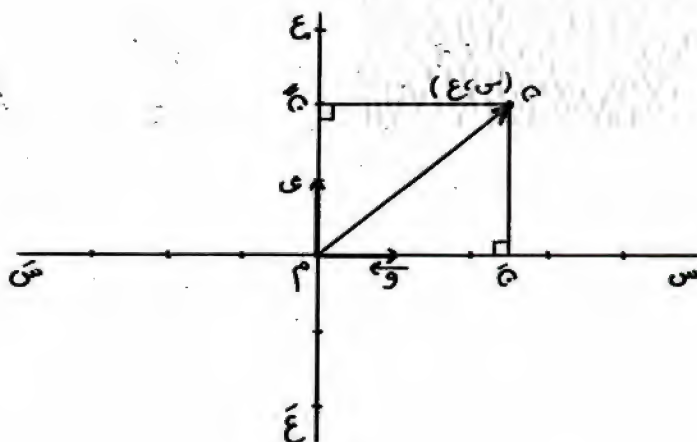
(2)  $L$  هي نظيرة  $A$  بالنسبة للنقطة  $H$ .

- ماذا يمثل المستقيم (ب ح) بالنسبة للقطعة [أ ل] ؟
- ما نوع المثلث ب ل ح ؟
- (3) عيّن مركز ونصف قطر الدائرة (د) المحيطة بالمثلث أ ب ح .
- هل النقطة ل تنتمي إلى (د) ؟
- (4) احسب  $\widehat{أ ح ب}$  و  $\widehat{ب ح أ}$  .
- استنتج قيمة تقريبية للقيس  $\widehat{أ ح ب}$  إلى الدرجة الواحدة بالنقصان باستعمال جدول النسب المثلثية .
- (5) (Δ) مماس يوازي (أ ل) ويشمل ح .
- أ) برهن أن (Δ) مماس للدائرة (د) .
- ب) نضع  $\{ك\} = (\Delta) \cap (ب ل)$  ، احسب ل ك .

## 1.1 طول شعاع :

مسألة : (م، و، ع) معلم متعامد ومتجانس للمستوي  
 هـ (س، ع) نقطة من المستوي .

- لنبرهن أن  $\|\vec{م هـ}\| = \sqrt{س^2 + ع^2}$



الشكل 1

البرهان :

نسمى هـ' ، هـ" المسقطين العموديين للنقطة هـ على (س س') ، (ع ع').  
 بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث القائم م هـ' هـ يكون :

$$م هـ^2 = م هـ'^2 + هـ' هـ^2$$

$$\text{لكن } م هـ' = س \text{ و } هـ' هـ = ع \text{ إذن } م هـ^2 = س^2 + ع^2$$

$$\text{إذن } م هـ^2 = س^2 + ع^2$$

$$\text{فيكون } م هـ = \sqrt{س^2 + ع^2}$$

$$\text{ونعلم أن } م هـ = \|\vec{م هـ}\|$$

نستنتج أن  $|\vec{m}| = \sqrt{s^2 + e^2}$  وبصفة عامة إذا كان  $\vec{m}$  شعاعاً في المستوي بحيث  $\vec{m} = \vec{s} = \vec{e}$  فإن:

$$|\vec{m}| = |\vec{s}| = |\vec{e}| = \sqrt{s^2 + e^2}$$

نظرية :

(م، و، ع) معلم متعامد ومتجانس للمستوي .  
 إذا كان  $\vec{m} = \begin{pmatrix} s \\ e \end{pmatrix}$  شعاعاً في المستوي فإن :  
 $|\vec{m}| = \sqrt{s^2 + e^2}$

أي إذا كان  $\vec{m} = \vec{s} + \vec{e}$  فإن :

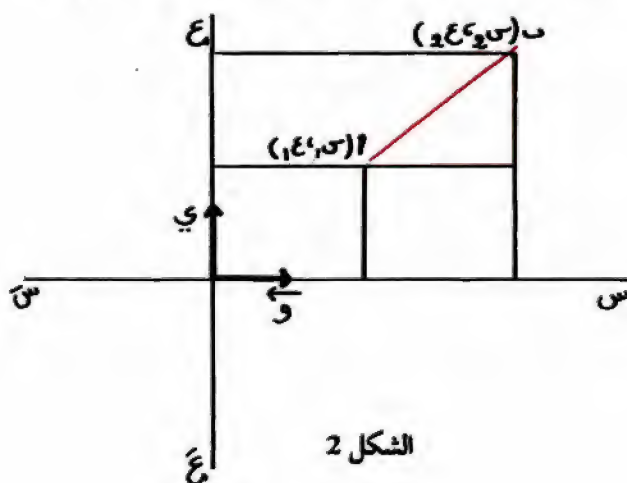
$$|\vec{m}| = \sqrt{s^2 + e^2}$$

(ب) طول قطعة مستقيمة أو المسافة بين نقطتين :

(م، و، ع) معلم متعامد ومتجانس للمستوي .

أ (س<sub>1</sub>، ع<sub>1</sub>) ، ب (س<sub>2</sub>، ع<sub>2</sub>) نقطتان من المستوي .

$$- \text{ لنبرهن أن } |ab| = \sqrt{(s_1 - s_2)^2 + (e_1 - e_2)^2}$$



الشكل 2



البرهان :

نعلم أنه إذا كانت  $A(س_1، ع_1)$  ،  $B(س_2، ع_2)$  نقطتان من المستوي فإن مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{AB}$  هما  $(س_1 - س_2)$  و  $(ع_1 - ع_2)$

$$\text{أي } \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} س_1 - س_2 \\ ع_1 - ع_2 \end{pmatrix}$$

وحسب المسألة السابقة نستنتج أن :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$$

$$\text{أي } \overrightarrow{AB} = \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ع_1 - ع_2)^2}$$

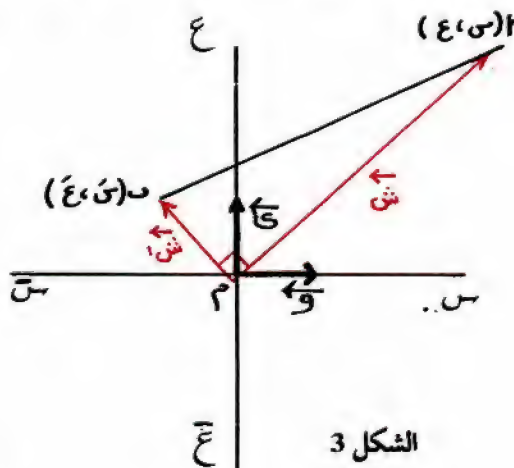
2. شرط تعامد شعاعين :

مسألة .

(م ، و ، ي) معلم متعامد ومتجانس .

شعاعان  $\overrightarrow{ش} = \begin{pmatrix} س \\ ع \end{pmatrix}$  ،  $\overrightarrow{ش'} = \begin{pmatrix} س' \\ ع' \end{pmatrix}$

- لنبهرن أنه إذا كان  $\overrightarrow{ش} \perp \overrightarrow{ش'}$  فإن  $س س' + ع ع' = 0$



الشكل 3

البرهان :

- نختار نقطتين  $f$ ،  $b$  من المستوي بحيث  $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{b}$

و  $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b'}$  و  $(f, m) \perp (b, m)$ .

لدينا  $f(s, e)$  و  $b(s', e')$ .

نستنتج أن  $f = \sqrt{s^2 + e^2}$ ؛  $b = \sqrt{s'^2 + e'^2}$

وأن :  $f = \sqrt{(s - s')^2 + (e - e')^2}$ .

ولكن  $(f, m) \perp (b, m)$  فالمثلث  $fmb$  قائم في  $m$

فيكون لدينا حسب نظرية فيثاغورث :

$$f^2 = b^2 + m^2$$

$$\text{أي } f^2 - b^2 = m^2$$

$$0 = (s^2 + e^2) - (s'^2 + e'^2)$$

$$0 = (s^2 - s'^2) + (e^2 - e'^2)$$

$$0 = (s + s')(s - s') + (e + e')(e - e')$$

أي أنه إذا كان  $(f, m) \perp (b, m)$  فإن :

$$s's' + e'e' = 0$$

• نقبل في هذا المستوي أنه إذا كان  $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} s \\ e \end{pmatrix}$  و  $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} s' \\ e' \end{pmatrix}$  شعاعين

بحيث  $s's' + e'e' = 0$  فإن  $\overrightarrow{f} \perp \overrightarrow{b}$

نظرية :

$(m, \overrightarrow{f}, \overrightarrow{b})$  معلم متعامد ومتجانس للمستوي

$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} s \\ e \end{pmatrix}$ ،  $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} s' \\ e' \end{pmatrix}$  شعاعان في نفس المستوي

$$\overrightarrow{f} \perp \overrightarrow{b} \text{ معناه } s's' + e'e' = 0$$

### 3. معادلة مستقيم يشمل نقطة ويعامد شعاعاً معلوماً :

مثال :

( م ، و ، ي ) معلم متعامد ومتجانس .

ش  $\left( \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right)^{\leftarrow}$  شعاع . ( و ) مستقيم يشمل النقطة هـ ( - 4 ، 2 ) ويعامد منحنى الشعاع ش .

لنبحث عن معادلة للمستقيم ( و )

- إذا كانت هـ ( س ، ع ) نقطة من المستوي فإن هـ  $\left( \begin{matrix} 4 + س \\ 2 - ع \end{matrix} \right)^{\leftarrow}$  .  
 هـ  $\Rightarrow$  ( و ) معناه هـ  $\perp$  ش .  
 وهذا يعني أن .

$$0 = (2 - ع) 3 - (4 + س) 5$$

$$0 = 6 + ع 3 - 20 + س 5$$

$$0 = 26 + ع 3 - س 5 \quad \text{فتكون معادلة للمستقيم ( و ) .}$$

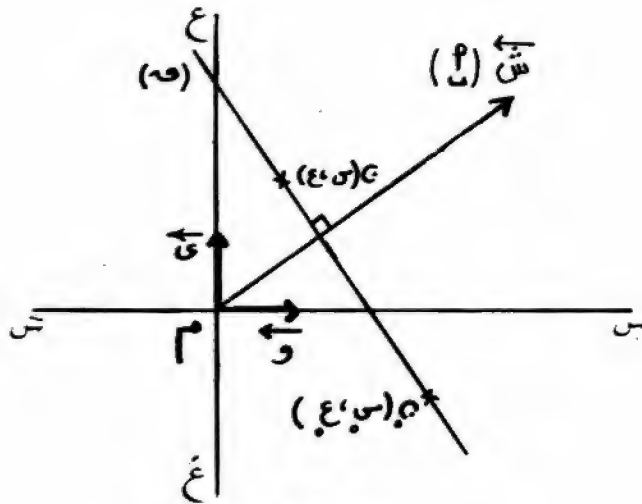
المستقيم ( و ) الذي يشمل النقطة هـ ( - 4 ، 2 ) ويعامد الشعاع

ش  $\left( \begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right)^{\leftarrow}$  هو مجموعة النقط هـ ( س ، ع ) بحيث :

$$0 = 26 + ع 3 - س 5$$

• وبصفة عامة يمكن تعيين معادلة للمستقيم الذي يشمل نقطة معلومة

هـ ( س<sub>0</sub> ، ع<sub>0</sub> ) ويعامد شعاعاً معلوماً ش  $\left( \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right)^{\leftarrow}$  :



الشكل 4

إذا كانت  $G(س، ع)$  نقطة من المستقيم (م) فهذا يعني أن  $\vec{OG} \perp \vec{ش}$

ولدينا  $\vec{OG} = \begin{pmatrix} س - س_0 \\ ع - ع_0 \end{pmatrix}$  و  $\vec{ش} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

إذن حسب شرط تعامد شعاعين يكون :

$$0 = (س - س_0) + (ع - ع_0) \cdot 0$$

$$0 = س - س_0 + ع - ع_0$$

$$0 = (س - س_0) + (ع - ع_0)$$

$$\text{نضع } د = س - س_0 + ع - ع_0 \text{ فيكون :}$$

$$0 = د + س_0 + ع_0$$

وهي معادلة المستقيم (م) الذي يعامد الشعاع  $\vec{ش}$  ويشمل النقطة

$$G(س_0، ع_0)$$

- نقبل أن المستقيم المعين بمعادلة من الشكل :



$$1 \text{ س} + 1 \text{ ب} + 0 \text{ ح} = 0 \text{ يعامد الشعاع الذي مركباته } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$- \text{ وأيضاً هذا المستقيم يوازي الشعاع الذي مركباته } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

أوجد معادلة للمستقيم الذي يشمل النقطة  $(1, 1, 1)$  ويعامد الشعاع  $\vec{ش} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

#### 4. شرط تعامد مستقيمين :

مسألة : ( م ، و ، س ) معلم متعامد ومتجانس ، ولنعين شرط تعامد المستقيمين :

$$(و) \text{ المعين بالمعادلة } 1 \text{ س} + 1 \text{ ب} + 0 \text{ ح} = 0$$

$$(و') \text{ المعين بالمعادلة } 1 \text{ س} + 1 \text{ ب} + 0 \text{ ح}' = 0$$

$$\text{نعلم أن } \vec{ش} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم } (و).$$

$$\text{وأن } \vec{ش}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ هو شعاع توجيه للمستقيم } (و').$$

$$\text{وأن العددين } \frac{1}{1}, \frac{1}{1} \text{ هما ميلتا المستقيمين } (و), (و').$$

$$\text{ونعلم أن } (و) \perp (و') \text{ معناه } \vec{ش} \perp \vec{ش}'.$$

$$\text{ولكن } \vec{ش} \perp \vec{ش}' \text{ معناه } (و) \times (و') = 0, \text{ (حسب شرط تعامد شعاعين)}$$

$$\text{ومنه } 1 = (و) \times (و') = 1$$



وبالقسمة على العدد غير المعلوم  $(-b) \times (-b)$  نجد :

$$1 = \left( \frac{1}{-b} \right) \times \left( \frac{1}{-b} \right) \quad \text{أي} \quad 1 = \frac{1}{(-b) \times (-b)}$$

هذا يعني أن جداء ميلَي المستقيمين  $(q)$  و  $(q')$  يساوي  $-1$   
نظرية :

(م، و، ع) معلم متعامد ومتجانس .  
( $(q)$ ، ( $q'$ ) مستقيمان متعامدان) معناه (جداء ميليهما يساوي  $-1$ )

(م، و، ع) معلم متعامد ومتجانس .  
( $q$ )، ( $k$ ) مستقيمان معينان على الترتيب بالمعادلتين :  
 $2x + 3y - 5 = 0$  و  $9x - 6y - 0 = 0$  .  
بين أن ( $q$ )، ( $k$ ) متعامدان .

### 5. معادلة مستقيم يشمل نقطة معلومة ويعامد مستقيماً معلوماً ::

مثال : (م، و، ع) معلم متعامد ومتجانس .  
( $q$ ) مستقيم معين بالمعادلة :  $3x - 5y + 0 = 0$   
- لنعين معادلة للمستقيم ( $k$ ) العمودي على ( $q$ ) والذي يشمل النقطة  
هـ ( $-2$ ،  $3$ ) .





**مسألة محلولة**

(م، و، ي) معلم متعاود ومتجانس. وحدة الطول هي السنتيمتر.

أ)  $(0, 1)$ ، ب)  $(3, 0)$ ، ج)  $(-9, 0)$  ثلاث نقاط من المستوى .

(1) احسب كلاً من  $a$ ،  $b$ ،  $c$ ،  $d$ ،  $e$ ،  $f$ ،  $g$ ،  $h$ ،  $i$ ،  $j$ ،  $k$ ،  $l$ ،  $m$ ،  $n$ ،  $o$ ،  $p$ ،  $q$ ،  $r$ ،  $s$ ،  $t$ ،  $u$ ،  $v$ ،  $w$ ،  $x$ ،  $y$ ،  $z$ ،  $aa$ ،  $ab$ ،  $ac$ ،  $ad$ ،  $ae$ ،  $af$ ،  $ag$ ،  $ah$ ،  $ai$ ،  $aj$ ،  $ak$ ،  $al$ ،  $am$ ،  $an$ ،  $ao$ ،  $ap$ ،  $aq$ ،  $ar$ ،  $as$ ،  $at$ ،  $au$ ،  $av$ ،  $aw$ ،  $ax$ ،  $ay$ ،  $az$ ،  $ba$ ،  $bb$ ،  $bc$ ،  $bd$ ،  $be$ ،  $bf$ ،  $bg$ ،  $bh$ ،  $bi$ ،  $bj$ ،  $bk$ ،  $bl$ ،  $bm$ ،  $bn$ ،  $bo$ ،  $bp$ ،  $bq$ ،  $br$ ،  $bs$ ،  $bt$ ،  $bu$ ،  $bv$ ،  $bw$ ،  $bx$ ،  $by$ ،  $bz$ ،  $ca$ ،  $cb$ ،  $cc$ ،  $cd$ ،  $ce$ ،  $cf$ ،  $cg$ ،  $ch$ ،  $ci$ ،  $cj$ ،  $ck$ ،  $cl$ ،  $cm$ ،  $cn$ ،  $co$ ،  $cp$ ،  $cq$ ،  $cr$ ،  $cs$ ،  $ct$ ،  $cu$ ،  $cv$ ،  $cw$ ،  $cx$ ،  $cy$ ،  $cz$ ،  $da$ ،  $db$ ،  $dc$ ،  $dd$ ،  $de$ ،  $df$ ،  $dg$ ،  $dh$ ،  $di$ ،  $dj$ ،  $dk$ ،  $dl$ ،  $dm$ ،  $dn$ ،  $do$ ،  $dp$ ،  $dq$ ،  $dr$ ،  $ds$ ،  $dt$ ،  $du$ ،  $dv$ ،  $dw$ ،  $dx$ ،  $dy$ ،  $dz$ ،  $ea$ ،  $eb$ ،  $ec$ ،  $ed$ ،  $ee$ ،  $ef$ ،  $eg$ ،  $eh$ ،  $ei$ ،  $ej$ ،  $ek$ ،  $el$ ،  $em$ ،  $en$ ،  $eo$ ،  $ep$ ،  $eq$ ،  $er$ ،  $es$ ،  $et$ ،  $eu$ ،  $ev$ ،  $ew$ ،  $ex$ ،  $ey$ ،  $ez$ ،  $fa$ ،  $fb$ ،  $fc$ ،  $fd$ ،  $fe$ ،  $ff$ ،  $fg$ ،  $fh$ ،  $fi$ ،  $fj$ ،  $fk$ ،  $fl$ ،  $fm$ ،  $fn$ ،  $fo$ ،  $fp$ ،  $fq$ ،  $fr$ ،  $fs$ ،  $ft$ ،  $fu$ ،  $fv$ ،  $fw$ ،  $fx$ ،  $fy$ ،  $fz$ ،  $ga$ ،  $gb$ ،  $gc$ ،  $gd$ ،  $ge$ ،  $gf$ ،  $gg$ ،  $gh$ ،  $gi$ ،  $gj$ ،  $gk$ ،  $gl$ ،  $gm$ ،  $gn$ ،  $go$ ،  $gp$ ،  $gq$ ،  $gr$ ،  $gs$ ،  $gt$ ،  $gu$ ،  $gv$ ،  $gw$ ،  $gx$ ،  $gy$ ،  $gz$ ،  $ha$ ،  $hb$ ،  $hc$ ،  $hd$ ،  $he$ ،  $hf$ ،  $hg$ ،  $hh$ ،  $hi$ ،  $hj$ ،  $hk$ ،  $hl$ ،  $hm$ ،  $hn$ ،  $ho$ ،  $hp$ ،  $hq$ ،  $hr$ ،  $hs$ ،  $ht$ ،  $hu$ ،  $hv$ ،  $hw$ ،  $hx$ ،  $hy$ ،  $hz$ ،  $ia$ ،  $ib$ ،  $ic$ ،  $id$ ،  $ie$ ،  $if$ ،  $ig$ ،  $ih$ ،  $ii$ ،  $ij$ ،  $ik$ ،  $il$ ،  $im$ ،  $in$ ،  $io$ ،  $ip$ ،  $iq$ ،  $ir$ ،  $is$ ،  $it$ ،  $iu$ ،  $iv$ ،  $iw$ ،  $ix$ ،  $iy$ ،  $iz$ ،  $ja$ ،  $jb$ ،  $jc$ ،  $jd$ ،  $je$ ،  $jf$ ،  $jj$ ،  $jk$ ،  $jl$ ،  $jm$ ،  $jn$ ،  $jo$ ،  $jp$ ،  $jq$ ،  $jr$ ،  $js$ ،  $jt$ ،  $ju$ ،  $jv$ ،  $jw$ ،  $jx$ ،  $jy$ ،  $jz$ ،  $ka$ ،  $kb$ ،  $kc$ ،  $kd$ ،  $ke$ ،  $kf$ ،  $kg$ ،  $kh$ ،  $ki$ ،  $kj$ ،  $kk$ ،  $kl$ ،  $km$ ،  $kn$ ،  $ko$ ،  $kp$ ،  $kq$ ،  $kr$ ،  $ks$ ،  $kt$ ،  $ku$ ،  $kv$ ،  $kw$ ،  $kx$ ،  $ky$ ،  $kz$ ،  $la$ ،  $lb$ ،  $lc$ ،  $ld$ ،  $le$ ،  $lf$ ،  $lg$ ،  $lh$ ،  $li$ ،  $lj$ ،  $lk$ ،  $ll$ ،  $lm$ ،  $ln$ ،  $lo$ ،  $lp$ ،  $lq$ ،  $lr$ ،  $ls$ ،  $lt$ ،  $lu$ ،  $lv$ ،  $lw$ ،  $lx$ ،  $ly$ ،  $lz$ ،  $ma$ ،  $mb$ ،  $mc$ ،  $md$ ،  $me$ ،  $mf$ ،  $mg$ ،  $mh$ ،  $mi$ ،  $mj$ ،  $mk$ ،  $ml$ ،  $mm$ ،  $mn$ ،  $mo$ ،  $mp$ ،  $mq$ ،  $mr$ ،  $ms$ ،  $mt$ ،  $mu$ ،  $mv$ ،  $mw$ ،  $mx$ ،  $my$ ،  $mz$ ،  $na$ ،  $nb$ ،  $nc$ ،  $nd$ ،  $ne$ ،  $nf$ ،  $ng$ ،  $nh$ ،  $ni$ ،  $nj$ ،  $nk$ ،  $nl$ ،  $nm$ ،  $nn$ ،  $no$ ،  $np$ ،  $nq$ ،  $nr$ ،  $ns$ ،  $nt$ ،  $nu$ ،  $nv$ ،  $nw$ ،  $nx$ ،  $ny$ ،  $nz$ ،  $oa$ ،  $ob$ ،  $oc$ ،  $od$ ،  $oe$ ،  $of$ ،  $og$ ،  $oh$ ،  $oi$ ،  $oj$ ،  $ok$ ،  $ol$ ،  $om$ ،  $on$ ،  $oo$ ،  $op$ ،  $oq$ ،  $or$ ،  $os$ ،  $ot$ ،  $ou$ ،  $ov$ ،  $ow$ ،  $ox$ ،  $oy$ ،  $oz$ ،  $pa$ ،  $pb$ ،  $pc$ ،  $pd$ ،  $pe$ ،  $pf$ ،  $pg$ ،  $ph$ ،  $pi$ ،  $pj$ ،  $pk$ ،  $pl$ ،  $pm$ ،  $pn$ ،  $po$ ،  $pp$ ،  $pq$ ،  $pr$ ،  $ps$ ،  $pt$ ،  $pu$ ،  $pv$ ،  $pw$ ،  $px$ ،  $py$ ،  $pz$ ،  $qa$ ،  $qb$ ،  $qc$ ،  $qd$ ،  $qe$ ،  $qf$ ،  $qg$ ،  $qh$ ،  $qi$ ،  $qj$ ،  $qk$ ،  $ql$ ،  $qm$ ،  $qn$ ،  $qo$ ،  $qp$ ،  $qq$ ،  $qr$ ،  $qs$ ،  $qt$ ،  $qu$ ،  $qv$ ،  $qw$ ،  $qx$ ،  $qy$ ،  $qz$ ،  $ra$ ،  $rb$ ،  $rc$ ،  $rd$ ،  $re$ ،  $rf$ ،  $rg$ ،  $rh$ ،  $ri$ ،  $rj$ ،  $rk$ ،  $rl$ ،  $rm$ ،  $rn$ ،  $ro$ ،  $rp$ ،  $rq$ ،  $rr$ ،  $rs$ ،  $rt$ ،  $ru$ ،  $rv$ ،  $rw$ ،  $rx$ ،  $ry$ ،  $rz$ ،  $sa$ ،  $sb$ ،  $sc$ ،  $sd$ ،  $se$ ،  $sf$ ،  $sg$ ،  $sh$ ،  $si$ ،  $sj$ ،  $sk$ ،  $sl$ ،  $sm$ ،  $sn$ ،  $so$ ،  $sp$ ،  $sq$ ،  $sr$ ،  $ss$ ،  $st$ ،  $su$

(2) اكتب معادلة للمستقيم (ب)، ثم عيّن ميله.

بين أن النقطة  $(-3, 2)$  تنتمي إلى  $(C \cup D)$ .

(ب) عَيْنُ إِحْدَاثِي النِّقْطَةِ كَ مُتَنَصِّفِ الْقِطْعَةِ [ د ح ] ثُمَّ أَوْجَدَ مُعَادِلَةَ لِلْمُسْتَقِيمِ

(۹) محور [۵ ح].

(ح) هـ منتصف القطعة [أ ح] ، المستقيم العمودي على (س' س) في هـ يقطع

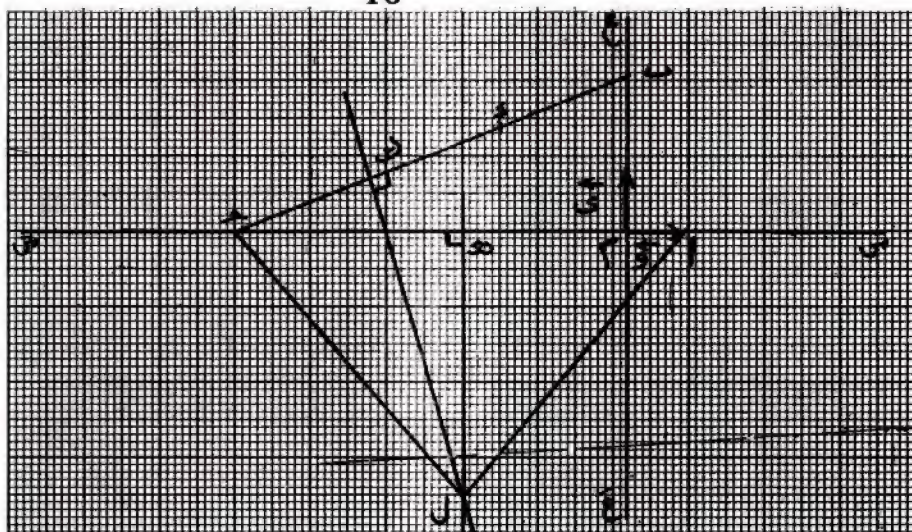
(١٩) في النقطة ل. عين إحدائي ل.

(3) برهن على أن  $L$  هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث  $ABC$ .

(ب) قارن بين له و ح ا. ما نوع المثلث ال ح ؟

عين له ثم تحقق أن  $\alpha$  حل رباعي دائري.

(4)  $\frac{\sqrt{10}}{10} = \widehat{\text{ج ب ا ح ك}} = \widehat{\text{ج ب ه ل ك}}$



« شکل 6 »



أو  $ع = \frac{1}{3}س + 3$ .

نستنتج أن ميل (ب ح) يساوي  $\frac{1}{3}$ .

• لدينا  $0 = 9 + 2 \times 3 - 3$ .

إذن النقطة د (2، 3) تنتمي إلى المستقيم (ب ح).

(ب) تعيين إحداثي النقطة ك منتصف [د ح] :

• لدينا ح (9، 0) ؛ د (2، 3) و ك منتصف [د ح].

فيكون  $س ك = \frac{س ح + س د}{2}$  و  $ع ك = \frac{ع ح + ع د}{2}$ .

أي  $س ك = \frac{3 - 9}{2} = -6$  و  $ع ك = \frac{2 + 0}{2} = 1$ .

إحداثيا النقطة ك هما -6 و 1.

• إيجاد معادلة للمستقيم (و) محور [د ح] :

(و) يشمل النقطة ك (2، 3) ويعامد الشعاع  $\overrightarrow{ح د}$ .

نفرض أن (و) يشمل نقطة أخرى ط (س، ع)

فيكون  $ك ط = \left( \begin{matrix} 6 + س \\ 1 - ع \end{matrix} \right)$  و  $\overrightarrow{ك ط} \perp \overrightarrow{ح د}$ .

فحسب شرط تعامد شعاعين يكون :

$0 = (1 - ع) \times 3 + (6 + س) \times 9$

$0 = 3 - ع + 54 + 9س$

$0 = 51 + 3س + ع$

أو  $0 = 17 + ع + 3س$



ح) تعين إحداثي ل :

• لدينا  $(و) \cap (ل ه) = \{ل\}$ .

ومعادلة  $(و)$  هي  $3س + ع + 17 = 0$ .

- لنعين معادلة للمستقيم  $(ل ه)$  حيث  $ه$  منتصف  $[أ ح]$ .

و  $أ(0, 1)$  و  $ح(0, 9)$ .

فيكون إحداثيا النقطة  $ه$  هما  $\left(\frac{0+0}{2}, \frac{9-1}{2}\right)$  أي  $ه(0, 4)$ .

وبما أن  $(ل ه) \perp (س' س)$  فإن معادلة  $(ل ه)$  هي :  $س + 4 = 0$ .

ولإيجاد إحداثي النقطة ل نقطة تقاطع  $(و)$  و  $(ل ه)$  نحل الجملة :

$$\left. \begin{array}{l} 3س + ع + 17 = 0 \dots\dots\dots (1) \\ س + 4 = 0 \dots\dots\dots (2) \end{array} \right\}$$

من المعادلة (2) نجد  $س = -4$ .

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد :  $0 = 17 + ع + 12$ .

$$ومنه ع = -17 - 12$$

$$إذن ع = -5$$

نستنتج أن إحداثي النقطة ل هما  $-4$  ،  $-5$ .

(3) أ) إثبات أن ل هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث أ ح و :

• بما أن  $ه$  هي منتصف  $[أ ح]$  و  $(ل ه) \perp (أ ح)$  ،

فإن  $(ل ه)$  هو محور  $[أ ح]$

نستنتج أن  $ل أ = ل ح$ .

وبما أن  $(و)$  هو محور  $[و ح]$  فإن  $ل و = ل ح$ .

فيكون  $ل أ = ل ح = ل و$

فالنقطة ل هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ا ح د .

ب) بما أن ل ا = ل ح فإن المثلث ا ل ح متساوي الساقين رأسه ل .

وبما أن ل ( 4 - ، 5 - ) ، ه ( 4 - ، 0 ) ،

$$\text{فإن ل ه} = \sqrt{(4-0)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{17} = 5.$$

ونعلم أن ا ح = 10

فيكون ل ه =  $\frac{1}{2}$  ا ح ، وبما أن [ل ه] متوسط في المثلث المتساوي الساقين ا ل ح ،

فإن ا ل ح متساوي الساقين وقائم في ل .

- في الرباعي ا ل ح ب الزاويتان المتقابلتان [ل ا ، ل ح] و [ب ا ، ب ح]

متكاملتان . نستنتج أنه رباعي دائري .

4) نضع ( ل ك )  $\cap$  ( ح ه ) = { ف } .

- في المثلثين ل ه ف و ح ك ف :

$$\widehat{ه} = \widehat{ك} = 1 \text{ ق ا}$$

و ل ف ه = ح ف ك ( بالتقابل بالرأس ) .

نستنتج أن ك ح ف = ه ل ف أو ا ح ب = ه ل ك .

فيكون جب ا ح ب = جب ه ل ك .

$$\text{وبما أن جب ا ح ب} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{فإن جب ا ح ب} = \text{جب ه ل ك} = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

## تمارين

نعتبر في كل التمارين الآتية أن المعلم متعامد ومتجانس .

1.  $f, g, h$  ثلاث نقط بحيث  $f(6, 4), g(1, 2), h(1, 6)$  .
  - (1) احسب إحداثيي  $m$  منتصف  $[gh]$  ، وإحداثيي  $m'$  منتصف  $[f'g]$  . وإحداثيي  $m''$  منتصف  $[f'h]$  .
  - (2) احسب  $g, h, f, a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$  .
  - (3) ما نوع المثلث  $afg$  ؟
2.  $f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$  أربع نقط بحيث  $f(-1, 3), g(3, 1), h(5, 3), i(1, 5)$  .
  - (1) احسب أطوال أضلاع الرباعي  $afgh$  . ما نوع الرباعي  $afgh$  ؟
  - (2) احسب إحداثيي نقطة تقاطع قطري الرباعي  $afgh$  .
3.  $f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z$  عَلمَ النقط  $f(3, 5), g(1, 4), h(2, 2)$  .
  - (1) عَلمَ النقط  $f(3, 5), g(1, 4), h(2, 2)$  .
  - (2) بَيِّنْ أن المثلث  $afg$  قائم في  $g$  ومتساوي الساقين .
  - (3)  $m$  منتصف القطعة  $[fg]$  . بَيِّنْ أن  $m = \frac{1}{2}fg$  .
4. أوجد معادلة محور القطعة  $[f'g]$  في كل من الحالات الآتية :
  - (1)  $f(3, 1), g(2, 3)$  .
  - (2)  $f(3, 0), g(2, 3)$  .
  - (3)  $f(2, 1), g(4, \frac{5}{2})$  .
  - (4)  $f(3, \frac{1}{2}), g(1, 5)$  .
  - (5)  $f(2, 2), g(2, \frac{3}{2})$  .
  - (6)  $f(1, 1), g(1, 1)$  .

5. أ (0، 3) ؛ ب (2، -3) ؛ ج (-1، 2) نقط من المستوي .

(1) بين أن  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$  . استنتج نوع المثلث أ ب ج .

(2) بين أن النقط أ ، ب ، ج (2، 7) ؛ د (-5، 4) على استقامة واحدة .

(3) د ، ه هما منتصفا الضلعين [أ ب] ، [ب ج] على الترتيب . أوجد العدد

الحقيقي ك بحيث :

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AK} . \text{ أ ح ثم استنتج أن } (\overrightarrow{DE}) // (\overrightarrow{AK}) .$$

6. أ ، ب ، ج ، د نقط من المستوي بحيث :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \text{ ؛ } \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \text{ ؛ } \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \text{ ؛ } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} .$$

(1) برهن أن  $(\overrightarrow{AO}) \perp (\overrightarrow{BP})$  .

(2) برهن أن  $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{AN}$  وأن  $\overrightarrow{AO} // \overrightarrow{BP}$  وأن  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BP}$  .

(3) ما نوع الرباعي أ ب ج د ؟

(4) احسب كلاً من  $\widehat{AOB}$  ،  $\widehat{AOC}$  ،  $\widehat{BOC}$  ،  $\widehat{AOP}$  ،  $\widehat{BOP}$  ،  $\widehat{COP}$  .

7. أ (3، 8) ؛ ب (8، 3) ؛ ج (1، 2) ؛ د (-4، 7) نقط من المستوي .

(1) بين أن الرباعي أ ب ج د متوازي أضلاع .

(2) ه (5، 6) نقطة من المستوى . بين أن النقط د ، أ ، ب على استقامة

واحدة .

(3) بين أن (ح د) و (أ ب) متعامدان في النقطة د .

8. (ق) ، (ك) مستقيمان بحيث :

$$(ق) : 3س - 2ع - 1 = 0 .$$

$$(ك) : 2س + 3ع - 1 = 0 .$$

(1) بين أن  $(ق) \perp (ك)$  .

(2) أنشئ كلاً من (ق) و (ك) .

9. (ق) مستقيم يشمل النقطة ه  $(\frac{1}{2}، \frac{1}{2})$  ؛ ص  $(\frac{3}{5})$  هو شعاع توجيه له .

- (1) أوجد معادلة للمستقيم (ق) .  
 (2) أوجد معادلة للمستقيم (ل) الذي يشمل ه ويعامد (ق) .  
 (3) (ك) مستقيم يشمل ه ويوازي ش  $\left( \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right)^+$  . عيّن  $\alpha$  ،  $\beta$  في كل من الحالتين

الآتيتين :

- (أ) (ق) // (ك) و  $\beta 2 = \alpha - 1$  .  
 (ب) (ق)  $\perp$  (ك) و  $\sqrt[3]{\beta} = \alpha$  .  
 10. (ق) :  $3 - س - ع + 2 = 0$  .  
 أ نقطة بحيث أ ( - 2 ، 1 ) .

- (1) عيّن شعاع توجيه للمستقيم (ق) .  
 (2) أوجد معادلة للمستقيم (ق') الذي يشمل أ ويعامد (ق) .  
 (3) ارسم (ق) و (ق') .

11. (1) علم النقط أ (0 ، 1) : ب ( - 1 ، 3 ) : ج (2 ، 4) .  
 (2) احسب مركبتي الشعاع  $\overrightarrow{م ج}$  .  
 (3) أ أوجد معادلة للمستقيم (ل) العمودي على (م ج) والذي يشمل أ .  
 ب أوجد أربعة أشعة لتوجيه المستقيم (ل) .  
 (4) ارسم المستقيمت (أ ب) . (أ ج) . (م ج) . (ل) .

12. (ق) مستقيم معادلته :  $(3 ط + 1) س - (ط - 2) ع + 2 ط - 1 = 0$  .  
 (حيث ط عدد حقيقي) . أ (2 ، 1) نقطة .  
 (1) عيّن ط بحيث يكون (ق) يشمل أ .  
 (2) عيّن ط بحيث يكون المستقيم (ق) موازياً للمستقيم (ل) الذي معادلته :

$$2 س - 3 ع + 1 = 0$$

- (3) عيّن ط لكي يكون (ق) عمودياً على المستقيم (ل) الذي معادلته

$$س - 5 ع = 0$$

- (4) ارسم المستقيمت (ق) . (ك) . (ل) .



$$13. (ق) : 5 - س + 2ع - 3 = 0.$$

(1) عيّن العدد الحقيقي  $\alpha$  لكي يكون المستقيم (ق) موازياً للمستقيم (ك) الذي معادلته  $0 = 1 - ع + 3س$ .

(2) عيّن العدد الحقيقي  $\beta$  لكي يكون المستقيم (ق) عمودياً على المستقيم (ل) الذي معادلته  $0 = 2 + ع + 2س$ .

$$14. أ (-4، 2) ؛ ب (3، 3) ؛ ح (2، -8) ؛ د (0، 2). نقاط من المستوى.$$

(1) بين أن النقطة ح هي نظيرة أ بالنسبة إلى د. وأن الشعاعين ب د و أ ح متعامدان.

(2) د هي نظيرة النقطة ب بالنسبة إلى ح.

- برهن أن الرباعي أ ب ح د معين ثم احسب طول ضلعه.

(3) ل نقطة من المستوى بحيث  $\vec{ل} = \vec{ب} + \vec{أ}$ .

بين أن (أ ل) // (ب د).

(4) (د) دائرة قطرها [أ ح].

- عيّن مركزها ثم احسب نصف قطرها.

- عيّن المماس لهذه الدائرة في النقطة أ.

$$15. ينسب المستوى إلى معلم متعامد ومتجانس. وحدة الطول هي السنتيمتر.$$

(1) ارسم المستقيم (ق) الذي معادلته  $2س + 8 = ع$ .

(2) المستقيم (ق) يقطع المستقيم (ع' ع) في النقطة أ ويقطع المستقيم (س' س) في النقطة ب.

أ) احسب إحداثي كل من النقطتين أ، ب.

ب) ح هو مركز الدائرة المحيطة بالمثلث أ ب م. احسب إحداثي النقطة ح.

(3) [م ه] هو عمود المثلث أ ب م المتعلق بالضلع [أ ب].

ما هما طولا القطعتين [م أ]، [م ب]؟ احسب طول كل من القطع [أ ب]، [م ح]، [م ه].

(4) أوجد معادلة المستقيم (م ه).

(5) احسب جيب الزاوية [أ. ب. أ].

(من امتحان ش. ت. م. 1982/04/23 بتصرف).

16. ينسب المستوى إلى معلم متعامد متجانس (م. و. و. ي). حاملًا محوريه هما

(س'س)، (ع'ع). وحدة الطول هي السنتيمتر.

أ (3، 2)؛ ب (-3، 7) نقطتان من المستوى

(1) احسب إحداثيي النقطة ه منتصف القطعة [أ. ب].

برهن أن النقطة ه تنتمي إلى المستقيم (ع'ع).

(2) أوجد معادلة للمستقيم (أ. ب).

(3) ارسم المستقيم ( $\Delta$ ) الذي معادلته  $6x - 5y + 4 = 0$ .

(4) أ) برهن أن المستقيمين ( $\Delta$ )، (أ. ب) متعامدان.

ب) استتج أن ( $\Delta$ ) هو محور القطعة [أ. ب].

(5) إن الدائرة التي مركزها ه ونصف قطرها أ تقطع المستقيم ( $\Delta$ ) في النقطتين

ح، ح'.

- احسب طول كل من القطعتين [ه. ح]، [ب. ح].

(من امتحان ش. ت. م. 1982/6/1 المنطقة الثانية)

17. أ) (1، -2)؛ ب (5، 0)؛ ح  $\left(3 - \frac{13}{2}, \dots\right)$  نقاط من المستوى

(1) عيّن إحداثيي النقطة د بحيث يكون الرباعي أ. ب. ح. د متوازي أضلاع.

(2) بين أن النقط م، أ، د على استقامة واحدة.

(3) احسب كلاً من أ. ب، أ. د، ب. د. ثم استتج أن المثلث أ. ب. د قائم.

(4) نضع  $\{ه\} = (أ. د) \cap (ب. د)$ .

- احسب إحداثيي النقطة ه.

المستقيم الذي يوازي (ب. ح) ويشمل ه يقطع (م. ب) في ك

- برهن أن ك هي منتصف [م. ب].

(5) برهن أن النقط أ. ب. ح. د. ك تنتمي إلى دائرة مركزها ه.

18. أ (2-، 4-) ؛ ب (2، 6) ؛ ج (3، 6) نقط من المستوي

(1) برهن أن  $\vec{0} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$

(2) برهن أن المثلث أ ب ج قائم .

(3) ك ، د نقطتان بحيث :  $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$  ،  $\vec{b} = 2\vec{c} + \vec{d}$  .

- عين إحداثيي كل من ك و د .

- برهن أن الرباعي أ ب ج د مستطيل .

(4) ل (2-، 5-) نقطة من المستوي .

برهن أن النقط أ ، ب ، ج ، د ، ل تنتمي إلى دائرة مركزها ك يطلب تعيين نصف قطرها .

(5) إذا كان  $\alpha$  هو القيس بالدرجات للزاوية [أ ب ، أ ج] فاحسب ظل  $\alpha$  .

- أوجد حصراً بالتقريب إلى الدرجة للقيس  $\alpha$  باستعمال جدول النسب المثلثية .

19. أ (0، 6) ؛ ب (0، 12) ؛ ج (0، 6-) نقط من المستوي

(1) بين أن س - ع - 6 = 0 هي معادلة للمستقيم (أ ج)

وأن س - 2ع - 12 = 0 هي معادلة للمستقيم (ب ج) .

(2) (ل) مستقيم معادلته س + ع = 0 .

- بين أن (ل) يقطع (أ ج) في النقطة د (3، 3-) ويقطع (ب ج) في

النقطة هـ (4، 4-) .

(3) نسمي ف ، ق ، ك متصفات القطع [م ج] ، [أ هـ] ، [ب د] على

الترتيب .

أ احسب إحداثيي كل من هذه النقط .

ب بين أن ف ، و ، ك على استقامة واحدة .

(4) (ي) مستقيم معين بالمعادلة :

$(1 - ط) س + (2 ط - 1) ع + ط - 1 = 0$  (حيث ط عدد حقيقي)

عَيْن ط في كل من الحالات الآتية :

(أ) ف تنتمي إلى (ي) .

(ب) (ي) // (ل) .

(ح) (ي)  $\perp$  (ج) .

20. ا، ب، ح ثلاث نقط بحث :

م 5 = ا ؛ م 3 - و 4 = ب ؛ ب 6 - و 8 = ج .

(1) احسب إحداثيي النقطة و بحيث يكون الرباعي  $ABCD$  متوازي أضلاع.

• عَيْنُ مَوْعِ النُّقْطَةِ م بِالنَّسْبَةِ إِلَى النُّقْطَتَيْنِ م وَح .

(2) ما نوع الرباعي م أ ه ح حيث ه هي متصرف [أه].

(3) برهن أن المثلث  $ABC$  قائم في  $A$ .

- احسب إحداثي مركز الدائرة المحيطة به .

(4)  $\alpha$  هو القيس بالدرجات للزاوية  $[ح' ، ح]$  .

عَيْنِ جَب  $\alpha$  ثم قيمة تقريبية للقيس  $\alpha$  إلى الوحدة بالنقصان إذا علمت أن

$$3,17 > \sqrt{10} > 3,16$$

(5) ث هو مركز ثقل المثلث ا ب ج .

برهن أن النقط م ، ث ، و على استقامة واحدة .

21. المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس (م، و، ي)

محورہ (س'س) و (ع'ع)۔

(٩٠) مستقيم معادلته  $x = 3$  .

(29) مستقيم معادلته  $3 + س = ع$

1) المستقيم  $(Q_1)$  يقطع  $(S'S)$  في النقطة  $M$  ، والمستقيم  $(Q_2)$  يقطع

(س'س) في النقطة ح. احسب إحداثيات النقطتين م ، ح .

برهن أن المستقيمين  $(l_1)$  ،  $(l_2)$  يقطعان  $(\epsilon')$  في نقطة واحدة  $\Gamma$  . ارسم

المستقيمين (١) ، (٢) .

- (2) برهن أن النقطة م هي منتصف القطعة [ م ح ] ، وأن المثلث أ م ح متساوي الساقين وقائم في أ .
- (3) ه نقطة من المستوي فاصلتها معلومة وترتيبها - 3 .  
أوجد معادلة للمستقيم ( ه ح ) .
- (4) برهن أن المستقيم ( ه ح ) يوازي المستقيم ( أ ب ) .
- (5) برهن أن للقطعتين الميقتيمتين [ م ح ] - [ أ ه ] نفس المنتصف . وأن  
الرباعي أ م ه ح مربع
- (من امتحان ش . ت . أ )



نقدم في هذا الباب مسائل عامة من الحياة اليومية . أو مسائل هندسية يؤول حلها إلى :

- حل معادلات من الدرجة الأولى بمجهول حقيقي . أو
- حل جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين حقيقيين .

لحل هذا النوع من المسائل نراعي المراحل الآتية :

- (1) قراءة نص المسألة وتحليله لتحديد المعطيات والمجهيل .
- (2) التفسير الرياضي لنص المسألة وذلك باختيار رمز (أو رموز) للمجهول (أو للمجهيل)
- (3) وضع المسألة على شكل معادلة أو جملة معادلتين .
- (4) حل هذه المعادلات أو الجمل جبرياً أو بيانياً بالطرق المعروفة .
- (5) التحقق من أن حلول هذه المعادلات أو الجمل هي حلول للمسألة المفروضة .

1. مسائل تؤول إلى معادلات من الدرجة الأولى بمجهول واحد :

مسألة 1 :

لمحمد وأحمد وعلي مبلغ مالي مشترك قدره 1250 د.ج .

صرف محمد نصف حصته ، وصرف أحمد 10٪ من المبلغ الإجمالي . وصرف علي

$\frac{2}{5}$  ما صرفه محمد وأحمد . وبقى لهم 305 د.ج .

ما هي حصة محمد من هذا المال ؟ وما مصروف كل منهم ؟

الحل :

(1) تحديد المعاليم والمجاهيل في المسألة :

• المعاليم هي :

- المبلغ الاجمالي للأشخاص الثلاثة وهو 1250 د. ج .

- باقي المصاريف 305 د. ج .

- مصروف محمد وهو نصف حصته .

- مصروف أحمد وهو 10٪ من المبلغ الاجمالي . أي

$$125 = \frac{10 \times 1250}{100} \text{ د. ج .}$$

- مصروف علي وهو  $\frac{2}{5}$  من مصروف محمد وأحمد .

• المجهول هو :

- حصة محمد .

(2) اختيار رمز للمجهول :

نفرض أن حصة محمد من هذا المال هي س ، فيكون :

- مصروفه يساوي  $\frac{1}{2}$  س .

- ومصروف علي يساوي  $\frac{2}{5} \left( 125 + \frac{1}{2} س \right)$  .

(3) وضع المسألة على شكل معادلة :

نعلم أن المبلغ الباقي بعد المصاريف يساوي 305 د. ج .

فيكون :

$$305 = \left[ \left( 125 + \frac{1}{2} س \right) \frac{2}{5} + 125 + \frac{1}{2} س \right] - 1250$$

وبذلك نحصل على معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد .

4) حل هذه المعادلة :

لنحل المعادلة :

$$305 = \left[ 125 \times \frac{2}{5} + س \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + 125 + س \frac{1}{2} \right] - 1250$$

$$305 = \left( 50 + 125 + س \frac{1}{5} + س \frac{1}{2} \right) - 1250$$

$$305 = \left( 175 + س \frac{7}{10} \right) - 1250$$

$$305 = 175 - س \frac{7}{10} - 1250$$

$$305 = س \frac{7}{10} - 175 - 1250$$

$$305 = س \frac{7}{10} - 1075$$

$$1075 - 305 = س \frac{7}{10}$$

$$770 = س \frac{7}{10} \text{ أي } 770 = س \frac{7}{10}$$

$$\frac{7700}{7} = \frac{10}{7} \times 770 = \frac{770}{7} = س$$

فيكون

$$س = 1100$$

أي

إذن : حصة محمد هي 1100 د. ج .

- ومصرفه يساوي  $\frac{1}{2}$  س

أي  $1100 \times \frac{1}{2} = 550$  د. ج .

- ونعلم أن مصرف أحمد يساوي 125 د. ج .

- ومصرف علي بالدينار هو  $\frac{2}{5} (125 + 550) = 270 = 675 \times \frac{2}{5}$

(5) التحقيق :

مجموع المصاريف بالدينار هو  $945 = 270 + 125 + 550$

والباقي :  $305 = 945 - 1250$

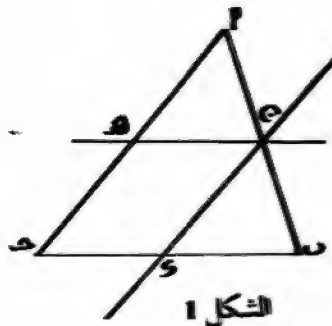
مسألة 2 :

وحدة الطول هي السيمتر .

أ ب ح مثلث حيث أ ب = 9 ، أ ح = 12 ، ب ح = 6 ؛

و نقطة من [أ ب] ، المستقيم الذي يشمل و ووازي (ب ح) ، يقطع (أ ح) في ه ؛  
والمستقيم الذي يشمل و ووازي (أ ح) ، يقطع (ب ح) في و . (الشكل 1) .

- عيّن أ و بحيث يكون محيط متوازي الأضلاع و ه ح و يساوي 20 .



الحل :

• المعلوم في هذه المسألة :

- أطوال أضلاع المثلث أ ب ح .

• المجهول في هذه المسألة : أ هـ

- بتطبيق نتيجة نظرية طالس على المثلث أ ب ح ، حيث (و هـ) // (ب ح) نجد أن :

$$\frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ ب}$$

$$\text{ومنه } \frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{أ هـ}{أ ب} \dots\dots\dots (1)$$

وبما أن (و د) // (أ ح) قلينا أيضاً :

$$\frac{ب د}{ب أ} = \frac{ب د}{ب أ} = \frac{ب د}{ب أ}$$

$$\text{ومنه } \frac{ب د}{ب أ} = \frac{ب د}{ب أ} \dots\dots\dots (2)$$

• نضع أ هـ = س فيكون ب د = أ ب - س = 9 - س  
بالتعويض في (1) نجد أن :

$$\frac{س}{6} = \frac{س}{9} \text{ أي } 9 \times س = 6 \times س$$

$$\text{ومنه } 9 = 6 \dots\dots\dots (3)$$

وبالتعويض في (2) نجد أن :

$$\frac{9 - س}{12} = \frac{س}{9} \text{ أي } 9 \times (9 - س) = 12 \times س$$



$$(4) \quad \text{ومنه } د = (س - 9) \frac{12}{9} = (س - 9) \frac{4}{3} \dots\dots\dots (5)$$

• لكي يكون محيط متوازي الأضلاع د ح ه يساوي 20 .

$$\text{يجب أن يكون } 2 د ح + 2 د = 20$$

$$\text{أي } د ح + د = 10 \dots\dots\dots (5)$$

لنعوض في (5) كلاً من د ح ، د بقيمته بدلالة س فنجد :

$$10 = (س - 9) \frac{4}{3} + س \frac{2}{3}$$

وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهول س .

• لنحل في ج هذه المعادلة ؛ أي :

$$10 = س \frac{4}{3} - 12 + س \frac{2}{3}$$

$$12 - 10 = س \frac{4}{3} - س \frac{2}{3}$$

$$2 = س \frac{2}{3} - 2 \quad \text{ومنه } 2 - 2 = س \frac{2}{3} - 6$$

$$\boxed{س = 3} \quad \text{أي}$$

فمجموعة حلول هذه المعادلة هي المجموعة { 3 } .

نستنتج أن ا د = 3 .

• لتتحقق أن محيط متوازي الأضلاع د ح ه يساوي 20 .

$$\text{لدينا } د ح = س \frac{2}{3} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

$$(3-9) \frac{4}{3} = (س-9) \frac{4}{3} = س هـ و$$

$$8 = 6 \times \frac{4}{3} = س هـ$$

$$إذن 20 = (2 + 8) 2 = (س هـ + هـ هـ) 2$$

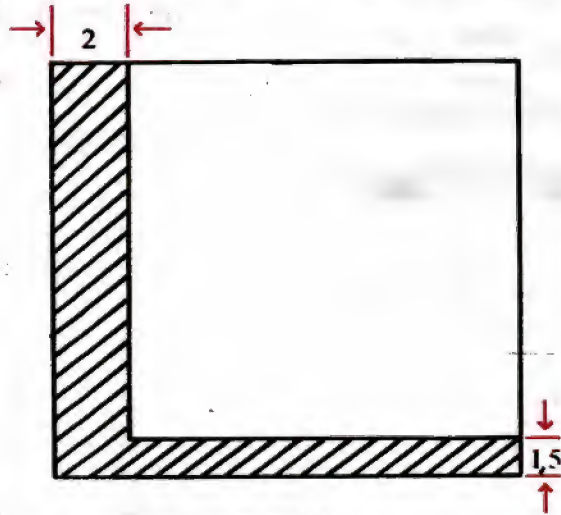
مسألة 3 :

وحدة الطول هي المليمتر .

صفیحة مربعة الشكل ، تعرضت للحرارة والطرق فتددت طولاً بمقدار 2 ، وعرضاً بمقدار 1,5 .

ونتیجة لذلك زادت مساحتها بمقدار 34,5 .

- عین بعدي الصفیحة قبل هذا التغير وبعده .



الشكل 2

الحل :

• المعالیم فی هذه المسألة هي :

- الفرق بین مساحتي الصفیحة بعد وقبل التغير

- الفرق بین بعدي الصفیحة بعد وقبل التغير.

• نسمى  $s$  طول ضلع هذه الصفيحة قبل التغير. فتكون مساحتها  $s^2$  - ويصبح بعدها بعد التغير  $s + 2$  و  $s + 1,5$ .

ومساحتها  $(s + 2)(s + 1,5)$ .

• زادت المساحة بعد التغير بمقدار 34,5 حسب المعطيات

$$\text{أي } (s + 2)(s + 1,5) - s^2 = 34,5$$

$$s^2 + 2s + 1,5s + 3 - s^2 = 34,5$$

$$3s + 3 = 34,5$$

$$3s = 31,5$$

وهي معادلة من الدرجة الأولى في  $s$  مجموعة حلولها  $\{9\}$ .

إذن طول ضلع الصفيحة قبل التغير يساوي 9.

وبعد الصفيحة بعد التغير هما  $(9 + 2)$  و  $(9 + 1,5)$  أي 11 و 10,5

• التحقق :

$$\text{مساحة الصفيحة قبل التغير تساوي } 9^2 = 81$$

$$\text{مساحة الصفيحة بعد التغير تساوي } 11 \times 10,5 = 115,5$$

الفرق بين مساحتي الصفيحة قبل وبعد التغير يساوي :

$$115,5 - 81 = 34,5$$

مسألة 4 :

اقتسم أحمد ومحمد وفاطمة وعلي تركة بحيث كانت حصصهم متناسبة مع الأعداد

$$2 : 3 : 4 : 5$$

(1) عيّن نسبة كل وارث من هذه التركة .

(2) إذا تمّ التقسيم بحيث تكون الحصص متناسبة مع الأعداد

8 ، 9 ، 11 ، 14 . فمن المستفيد من هذا التقسيم ومن الخاسر ؟

(3) إذا قُدِّرت الزيادة في حصة الوارث المستفيد بمبلغ 360 د.ج فما هي قيمة

التركة ؟ وما هي حصة كل وارث في التقسيم الأخير ؟

(4) كم ستكون حصتا محمد وعلي إذا كانت حصتا أحمد وفاطمة هما على التوالي 2178 دج و 1800 دج وكانت حصة محمد وسطاً متناسباً لحصتي أحمد وفاطمة ؟

الحل :

(1) نسمى س ، ع ، ص ، ل حصص الورثة الأربعة على الترتيب ، ونسمى م قيمة التركة .

$$\text{فيكون } \frac{س}{2} = \frac{ع}{3} = \frac{ص}{4} = \frac{ل}{5}$$

وحسب خواص التناسب نجد أن :

$$\frac{س}{2} = \frac{ع}{3} = \frac{ص}{4} = \frac{ل}{5} = \frac{س+ع+ص+ل}{2+3+4+5} = \frac{م}{14}$$

نستنتج أن :

$$\frac{س}{2} = \frac{م}{14} \text{ ومنه } س = \frac{2م}{14} \text{ أي } س = \frac{1}{7}م$$

$$\frac{ع}{3} = \frac{م}{14} \text{ ومنه } ع = \frac{3م}{14} \text{ أي } ع = \frac{3}{14}م$$

$$\frac{ص}{4} = \frac{م}{14} \text{ ومنه } ص = \frac{4م}{14} \text{ أي } ص = \frac{2}{7}م$$

$$\frac{ل}{5} = \frac{م}{14} \text{ ومنه } ل = \frac{5م}{14} \text{ أي } ل = \frac{5}{14}م$$

(2) نفرض أن حصص الورثة الأربعة في التقسيم الثاني هي س'، ع'، ص'، ل' على التوالي .

$$\frac{س'}{8} = \frac{ع'}{9} = \frac{ص'}{11} = \frac{ل'}{14} \text{ فيكون :}$$

$$\text{ومنه : } \frac{م}{42} = \frac{س' + ع' + ص' + ل'}{14 + 11 + 9 + 8} = \frac{س'}{8} = \frac{ع'}{9} = \frac{ص'}{11} = \frac{ل'}{14}$$

$$\boxed{\frac{4}{21}م = س'} \quad \text{أي} \quad \frac{8}{42}م = س' \quad \text{ومنه} \quad \frac{م}{42} = \frac{س'}{8}$$

$$\boxed{\frac{3}{14}م = ع'} \quad \text{أي} \quad \frac{9 \times م}{42} = ع' \quad \text{ومنه} \quad \frac{م}{42} = \frac{ع'}{9}$$

$$\boxed{\frac{11}{42}م = ص'} \quad \text{أي} \quad \frac{11م}{42} = ص' \quad \text{ومنه} \quad \frac{م}{42} = \frac{ص'}{11}$$

$$\boxed{\frac{1}{3}م = ل'} \quad \text{أي} \quad \frac{14م}{42} = ل' \quad \text{ومنه} \quad \frac{م}{42} = \frac{ل'}{14}$$

★ لكي نعيّن المستفيد من هذا التقسيم نقارن بين حصتي كل وارث في التقسيمين .

• لاحظ أن حصة محمد لم تتغير في التقسيمين أي  $ع = ع' = \frac{3}{14}م$  .

• بينما حصة أحمد هي  $\frac{1}{7}م$  في التقسيم الأول و  $\frac{4}{21}م$  في التقسيم الثاني .



$$\text{لكن } \frac{1}{7}م > \frac{4}{21}م \text{ (لأن } 4 \times 7 > 21 \times 1 \text{)}$$

نستنتج أن أحمد مستفيد من هذا التقسيم .

• وحصة فاطمة في التقسيم الأول هي  $\frac{2}{7}م$  بينما حصتها في التقسيم الثاني هي

$$\frac{11}{42}م$$

$$\text{وبما أن } \frac{11}{42}م < \frac{2}{7}م \text{ إذن } \frac{11}{42}م < \frac{2}{7}م$$

نستنتج أن فاطمة خسرت في هذا التقسيم .

• حصة علي في التقسيم الأول كانت  $\frac{5}{14}م$  وحصته في التقسيم الثاني هي  $\frac{1}{3}م$  .

$$\text{إذن علي قد خسر في هذا التقسيم لأن } \frac{1}{3}م < \frac{5}{14}م$$

ونستنتج من هذا أن المستفيد الوحيد من التقسيم الثاني هو أحمد .

(3) الزيادة في حصة أحمد هي :

$$س' - س = 360 .$$

$$\text{أي } 360 = \frac{1}{7}م - \frac{4}{21}م$$

$$360 = م \left( \frac{1}{7} - \frac{4}{21} \right)$$

$$360 = م \left( \frac{3-4}{21} \right)$$

$$360 = م \frac{1}{21}$$

$$21 \times 360 = م \quad \text{إذن}$$

$$\boxed{أي \quad م = 7560 \text{ د.ج}}$$

$$• \text{ حصة أحمد هي : 'س' } = م \frac{4}{21}$$

$$1440 = 7560 \times \frac{4}{21} = م \frac{4}{21}$$

$$\boxed{أي : 'س' = 1440 \text{ د.ج}}$$

$$• \text{ حصة محمد هي : 'ع' } = م \frac{3}{14} = 7560 \times \frac{3}{14}$$

$$\boxed{أي : 'ع' = 1620 \text{ د.ج}}$$

$$• \text{ حصة فاطمة هي : 'ص' } = م \frac{11}{42} = 7560 \times \frac{11}{42}$$

$$\boxed{أي : 'ص' = 1980 \text{ د.ج}}$$

$$• \text{ حصة علي هي : 'ل' } = م \frac{1}{3} = 7560 \times \frac{1}{3}$$

$$\boxed{أي : 'ل' = 2520 \text{ د.ج}}$$

(4) نعلم أن حصة محمد هي وسط متناسب لخصتي أحمد وفاطمة في التقسيم الثالث فإذا كانت حصة محمد في هذا التقسيم هي 'ف' ، فإن :

$$\frac{1}{1800} = \frac{2178}{1}$$

وهذا يعني أن  $2178 \times 1800 = 1$

ومنه :  $2178 \times 1800 \sqrt{=} 1$

$$1980 = 1 \text{ د. ج}$$

وتكون حصة علي مساوية الفرق :

$$(1980 + 1800 + 2178) - 7560$$

إن حصة علي في هذا التقسيم تساوي 1602 د. ج

## 2. مسائل تؤول إلى جمل معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

مسألة 1 :

يضم أحد رفوف مكتبة منزلية 42 كتاباً. سُمك بعض الكتب 3 سم . وسُمك البعض الآخر 5 سم . هذه الكتب مرصوفة في صف طوله 150 سم . أوجد عدد الكتب التي سُمكها 3 سم ، وعدد الكتب التي سُمكها 5 سم .

الحل :

نسمى س عدد الكتب ذات السمك 3 سم و ع عدد الكتب ذات السمك 5 سم ، فيكون :

$$س + ع = 42 \dots\dots (1)$$

وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س ، ع .

الطول الذي تشغله الكتب ذات السمك 3 سم هو 3 س .

والطول الذي تشغله الكتب ذات السمك 5 سم هو 5 ع .

$$\text{إذن } 3 س + 5 ع = 150 \dots\dots (2)$$

وهذه أيضا معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س . ع .  
ولإيجاد عدد الكتب من كل نوع ، علينا أن نحل جملة المعادلتين :

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + \text{ع} = 42 \dots\dots\dots (1) \\ 3 \text{ س} + 5 \text{ ع} = 150 \dots\dots (2) \end{array} \right\}$$

نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد (3 -) فنجد الجملة :

$$\left. \begin{array}{l} 3 - \text{س} - 3 \text{ ع} = 126 \\ 3 \text{ س} + 5 \text{ ع} = 150 \end{array} \right\}$$

وبالجمع نجد :

$$- \text{س} - 3 \text{ ع} + 3 \text{ س} + 5 \text{ ع} = 126 + 150$$

$$2 \text{ س} + 2 \text{ ع} = 276$$

$$2 \text{ س} + 2 \text{ ع} = 276$$

$$2 \text{ ع} = 276 - 2 \text{ س}$$

$$\boxed{\text{ع} = 12} \quad \text{إذن}$$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد :

$$42 = 12 + \text{س}$$

$$\boxed{\text{س} = 30} \quad \text{أي}$$

إذن حل الجملة السابقة هو ( 30 ، 12 )

• التحقق :

$$42 = 12 + 30$$

$$\left. \begin{array}{l} 42 = 12 + 30 \\ 150 = 12 \times 5 + 30 \times 3 \end{array} \right\} \text{لاحظ أن}$$

نستنتج أن عدد الكتب التي سمكها 3 سم هو 30 كتاباً .  
وعدد الكتب التي سمكها 5 سم هو 12 كتاباً .

## مسألة 2 :

(وحدة الطول هي السنتيمتر) .

صفحة معدنية مكونة من مربعين متجاورين مختلفين هما  $أ ب ح د$  ؛  $ح ه ف و$  ،  
مساحتهما متناسبتان مع العددين 4 ، 9 .

(1) أوجد طول ضلع كل منها إذا كان المحيط الكلي للصفحة هو 96 .

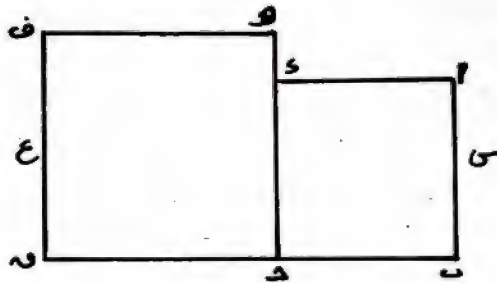
(2) أوجد طول ضلع صفحة أخرى مربعة الشكل لها نفس مساحة الصفحة

السابقة .

## الحل :

(1) • نسمى  $س$  طول ضلع المربع  $أ ب ح د$  ، فتكون مساحته  $س^2$  .

• ونسمى  $ع$  طول ضلع المربع  $ح ه ف و$  ، فتكون مساحته  $ع^2$  .



الشكل 3

نعلم أن  $س^2$  ،  $ع^2$  متناسبتان مع العددين 4 ، 9

$$\frac{س^2}{4} = \frac{ع^2}{9} \text{ أي}$$

(2) إذا كان محيط الصفحة  
لكل منها 28 سم .



$$\text{نستنتج أن : } \sqrt{\frac{2\text{ع}}{9}} = \sqrt{\frac{2\text{س}}{4}} \text{ أي } \frac{|\text{ع}|}{3} = \frac{|\text{س}|}{2}$$

نكن  $|\text{س}| = \text{س}$  و  $|\text{ع}| = \text{ع}$  لأن  $\text{س}$  ،  $\text{ع}$  عددان حقيقيان موجبان ( أطوال ) ،

$$\text{إذن } \frac{\text{ع}}{3} = \frac{\text{س}}{2}$$

$$\text{أي } 3\text{س} = 2\text{ع} \dots\dots\dots (1)$$

وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين  $\text{س}$  ،  $\text{ع}$  .

ولإيجاد هذين المجهولين يجب علينا أن نبحث عن علاقة أخرى بين المجهولين  $\text{س}$  ،  $\text{ع}$  .

إن محيط الصفيحة هو :

$$96 = (\text{ا ب} + \text{ب ح} + \text{ح د} + \text{د ه} + \text{ه ف} + \text{ف ق} + \text{ق ح})$$

$$\text{أي } 96 = (\text{س} + \text{س} + \text{س} + \text{د ه}) + (\text{ع} + \text{ع} + \text{ع})$$

$$96 = 3\text{س} + \text{د ه} + 3\text{ع}$$

$$\text{ولكن } \text{د ه} = \text{ح ه} - \text{ح د} = \text{س} - \text{ع}$$

فيكون :

$$96 = 3\text{س} + \text{س} - \text{ع} + 3\text{ع}$$

$$\text{أو } 96 = 4\text{س} + \text{ع} \dots\dots\dots (2)$$

وهي أيضا معادلة ثانية من الدرجة الأولى بالمجهولين  $\text{س}$  ،  $\text{ع}$  .

ولإيجاد هذين المجهولين ، أي لإيجاد طول ضلع كل من المربعين يلزمنا أن نحل في

المجموعة  $\text{ع} \times \text{ع}$  جملة المعادلتين (1) ، (2) .

$$\left. \begin{array}{l} 3\text{س} - 2\text{ع} = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 4\text{س} + \text{ع} = 96 \dots\dots\dots (2) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3\text{س} - 2\text{ع} = 0 \dots\dots\dots (1) \\ 4\text{س} + \text{ع} = 96 \dots\dots\dots (2) \end{array} \right\}$$

وهذا يعني أننا وضعنا معطيات المسألة المفروضة على شكل جملة ، لحلها نضرب طرفي المعادلة (1) في العدد 2 فنجد المعادلة المكافئة لها :

$$6س - 4ع = 0$$

وبذلك نحصل على الجملة الآتية

$$\left. \begin{aligned} 6س - 4ع &= 0 \\ 2س + 4ع &= 96 \end{aligned} \right\}$$

وبالجمع نجد :

$$6س - 4ع + 2س + 4ع = 96$$

$$\text{أي } 8س = 96 .$$

$$\text{فيكون } س = \frac{96}{8} = 12 .$$

وبالتعويض في المعادلة (1) أي  $3س = 2ع$

$$\text{نجد أن } ع = \frac{3س}{2} = \frac{12 \times 3}{2} = 18$$

نستنتج أن حل الجملة السابقة هو : ( 12 ، 18 ) .

هذا يعني أن طول ضلع المربع  $أ ب ح د$  هو 12 سم ،

وطول ضلع المربع  $هـ ز و ح$  هو 18 سم .

(2) نسمى  $م$  مساحة الصفيحة الثالثة ، فيكون

$$م = س^2 + ع^2 = 12^2 + 18^2$$

ويكون طول الضلع  $ض$  للصفيحة الثالثة التي مساحتها  $م$  هو :

$$ض = \sqrt{12^2 + 18^2} = \sqrt{144 + 324} = \sqrt{468}$$

$$\text{أي } ض \approx 21,7 \text{ سم} .$$

• لتحقق أن :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{18^2}{9} = \frac{12^2}{4} \\ , \\ 96 = 18 \times 4 + 12 \times 2 \end{array} \right\}$$

$$36 = 12 \times 3 = \frac{12 \times 12}{4} = \frac{12^2}{4} \text{ لدينا :}$$

$$36 = 18 \times 2 = \frac{18 \times 18}{9} = \frac{18^2}{9} \text{ و}$$

$$\text{اذن } \frac{18^2}{9} = \frac{12^2}{4}$$

$$\text{ولدينا : } 96 = 72 + 24 = 18 \times 4 + 12 \times 2$$

مسألة 3 :

انطلقت سيارة من مدينة أ على الساعة السادسة والنصف بسرعة متوسطة قدرها 60 كم / ساعة متوجهة نحو مدينة ب .

وفي نفس الوقت انطلقت دراجة نارية من المدينة ب نحو المدينة أ بسرعة متوسطة قدرها 52 كم / ساعة .

عين اللحظة التي تتلاقى فيها السيارة مع الدراجة ، وبعد نقطة التلاقي عن المدينة أ ، علماً بأن المسافة بين المدينتين أ ، ب هي 196 كم .  
مثل ذلك بياناً .

الحل :

نسمى ع المسافة بين المدينة أ ونقطة تلاقي السيارة مع الدراجة .  
ونسمى س الزمن الذي يستغرقه المتحركان من لحظة انطلاقهما حتى لحظة تلاقيهما .

بالنسبة إلى السيارة يكون :

ع = 60 س ..... (1) وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س ، ع لأن المسافة تساوي جداء السرعة المتوسطة والزمن .

وبالنسبة إلى الدراجة النارية يكون :

196 - ع = 52 س ..... (2) وهي معادلة من الدرجة الأولى بالمجهولين س ، ع .

ولإيجاد المسافة ع بين المدينة أ ونقطة التلاقي ، والزمن س الذي فيه تلتقي السيارة والدراجة ، يلزمنا أن نحل الجملة الآتية :

$$\left. \begin{array}{l} \text{ع} = 60 \text{ س} \dots\dots\dots (1) \\ 196 - \text{ع} = 52 \text{ س} \dots\dots\dots (2) \end{array} \right\}$$

التي هي جملة معادلتين من الدرجة الأولى بالمجهولين الحقيقيين س ، ع .

• لنحل هذه الجملة في المجموعة  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  .

بالجمع نجد :

$$\begin{array}{r} 196 - \text{ع} + \text{ع} = 52 \text{ س} + 60 \text{ س} \\ 196 = 112 \text{ س} \end{array}$$

$$\text{فيكون س} = \frac{196}{112} = \frac{7}{4}$$

$$\text{ويكون ع} = 60 \text{ س} = 60 \times \frac{7}{4} = 105$$

$$\left\{ \left( 105, \frac{7}{4} \right) \right\}$$
 فمجموعة حلول الجملة المفروضة هي

ونستنتج أن بُعد نقطة تلاقي السيارة والدراجة عن المدينة أ هو 105 كم .

وأن الزمن الذي يلتقيان فيه هو :

$$س = \frac{7}{4} \text{ سا.}$$

$$\text{أي } س = 1'45 \text{ سا.}$$

أي أنهما يلتقيان بعد ساعة و 45 دقيقة من لحظة تحركهما .  
وبما أنهما تحركا في الساعة 6 و 30 دقيقة ، إذن يلتقيان في الساعة 7 و 75 دقيقة  
أي في الساعة 8 و 15 دقيقة .

• نعلم أن الزمن المستغرق يساوي  $\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$

$$\frac{196}{60} \text{ إذن الزمن الذي تستغرقه السيارة لكي تصل إلى المدينة ب هو}$$

$$\text{أي } 3'16 \text{ سا.}$$

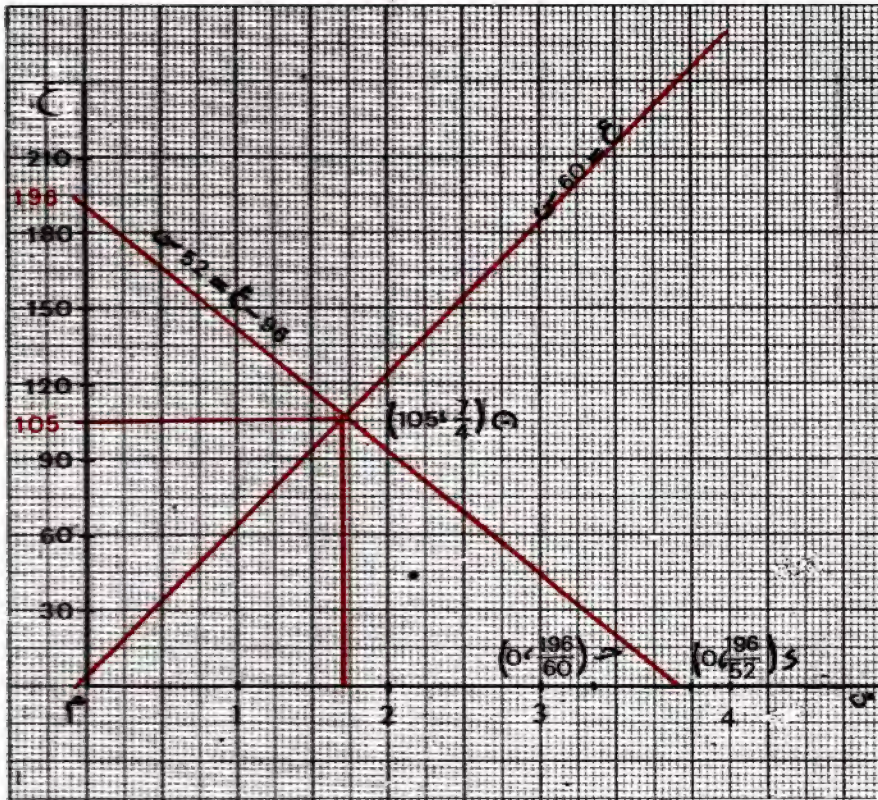
$$\frac{196}{52} \text{ والزمن الذي تستغرقه الدراجة لكي تصل إلى المدينة ا هو}$$

$$\text{أي } 3'46''9 \text{ سا تقريبا .}$$

التمثيل البياني :

نأخذ نصفي مستقيمين متعامدين [ م س و [ م ع ، ونمثل على [ م س الزمن حيث  
كل 2 سم تمثل 1 ساعة .  
ونمثل على [ م ع المسافة حيث كل 1 سم يمثل 30 كم .





الشكل 4

- د هي نقطة تلاقي السيارة والدراجة .  
 ح هي لحظة وصول السيارة إلى المدينة .  
 د هي لحظة وصول الدراجة إلى المدينة .

$$\left. \begin{aligned} \frac{7}{4} \times 60 &= 105 \\ \frac{7}{4} \times 52 &= 105 - 196 \end{aligned} \right\} : \text{التحقيق}$$

## تمارين

1. عمر أب 33 سنة وعمر ابنه 8 سنوات .  
- بعد كم سنة يصبح عمر الأب ثلاثة أضعاف عمر الابن ؟
2.  $\frac{9}{5} = \frac{1}{\hat{a}}$  ،  $\frac{4}{5} = \frac{1}{\hat{b}}$  حيث  $\hat{a}$  ،  $\hat{b}$  مثلث حيث  $\hat{c}$  .  
- احسب  $\hat{a}$  ،  $\hat{b}$  ،  $\hat{c}$  .
3. (و) مستقيم مزود بمعلم (م ، و) .  
 $\hat{a}$  ، ب نقطتان من (و) فاصلتهما - 3 ، 4 .  
- عين مجموعة النقط  $\hat{a}$  من (و) بحيث  $\frac{1}{\hat{a}} = \frac{1}{\hat{b}}$  .
4. المسافة بين مدينتين  $\hat{a}$  ، ب هي 135 كم ، فإذا انطلق متسابقان من مدينة  $\hat{a}$  في نفس الوقت وكانت سرعة الأول 45 كم / سا . وتعطل الثاني في الطريق واستغرق إصلاح سيارته  $\frac{1}{2}$  ساعة ومع ذلك وصل إلى المدينة ب قبل الأول بوقت قدره 15 دقيقة .  
- فما سرعة المتسابق الثاني ؟
5. أرض مستطيلة الشكل طولها ضعف عرضها أنشئ على حوافها ممراً عرضه 5 م فنقصت مساحتها 650 م<sup>2</sup> .  
- أوجد بعدي هذه الأرض .
6. سعة ثلاثة أواني 120 ل ، إذا كانت سعة الإناء الثاني تساوي  $\frac{1}{7}$  سعة الأول وسعة الإناء الثالث تساوي  $\frac{2}{3}$  سعة الثاني ناقصاً منها 10 ل .  
- ما هي سعة كل إناء ؟

7. أراد مزارع أن يخلط نوعين من السماد ، سعر الكيلوغرام من النوع الأول 32 د . ج وسعر الكيلوغرام من النوع الثاني 40 د . ج ليؤلف مزيجاً وزنه 100 كغ بحيث يصبح سعر الكيلوغرام من هذا المزيج 36,8 د . ج .

- احسب وزن ما يأخذه من كل نوع .

8. ( م ، و ، ي ) معلم متعامد ومتجانس . ط عدد حقيقي .

أ ( -3 ، 4 ) ، ب ( 3 ، 0 ) ، ج ( 0 ، ط ) ثلاث نقط من المستوي

( 1 ) احسب أ ، ب ، ج بدلالة ط .

( 2 ) عيّن العدد ط . بحيث يكون  $أ^2 + ب^2 = ج^2$

( 3 ) عيّن العدد ط بحيث تكون ج هي منتصف [ أ ب ] .

9. عدد مكوّن من رقمين ، رقم آحاده يزيد 2 عن رقم عشراته ، وإذا بدلنا موضعي الرقمين فإننا نحصل على عدد آخر ، مجموع هذا العدد والعدد الأول يساوي 132 . أوجد العدد الأول .

10. عدد يتكوّن من ثلاثة أرقام ، رقم آحاده يزيد عن رقم عشراته ، بمقدار 2 ويزيد عن رقم مئاته بمقدار 3 ، ويتكوّن عدد ثان من رقمين ، رقم آحاده هو مجموع رقمي آحاد ومئات العدد الأول ، ورقم عشراته يزيد عن رقم عشرات الأول بمقدار 1 . - أوجد هذين العددين .

11. ( م ، 6 ) دائرة ، أ نقطة داخل ( م ) بحيث  $أ = 2$  ، الدائرة د ( 1 ، 5 ) تقطع

( م ) في نقطتين ب ، ج . المستقيم ( م ) يقطع ( ب ج ) في هـ .

( 1 ) برهن أن كلاً من المثلثين م هـ ب ، أ هـ ب قائم في هـ .

( 2 ) احسب أ هـ ثم استنتج طول الوتر [ ب ج ] .

( طبق نظرية فيثاغورث على كل من المثلثين م هـ ب و أ هـ ب )

12. إذا كان مجموع ما يملكه محمد وضعف ما يملكه علي هو 54 دج ، وكان الفرق بين ما يملكه كل منهما 24 دج . فما هو المبلغ الذي يملكه كل منهما ؟

13. أوجد عدداً ناطقاً بحيث أنه :

– إذا أضفت 3 إلى كل من حدي الكسر الممثل به ، تحصل على العدد الناطق  $\frac{4}{5}$  .

– وإذا طرحت 4 من كل من حدي هذا الكسر تحصل على العدد الناطق  $\frac{1}{3}$  .

14. إذا كان مجموع أربعة أمثال عمر سعيد وثلاثة أمثال عمر أخيه 37 سنة والفرق بين خمسة أمثال عمر سعيد وضعف عمر أخيه 29 سنة .  
– فما عمر كل منهم ؟

15. مستطيل محيطه 192 م ، فإذا قلت مساحته بحيث أصبح الطول  $\frac{4}{5}$  الطول الأصلي والعرض  $\frac{3}{4}$  العرض الأصلي صار المحيط 132 م .  
– فما مساحته الأصلية ؟

16. اشترى طالب كتباً ودفاتر ، ثمن الكتاب الواحد يزيد خمسة دنانير عن ثمن 4 دفاتر ، والثن الإجمالي لخمسة كتب و 12 دفترًا هو 375 ديناراً  
– ما ثمن الكتاب وما ثمن الدفتر . (للكتب نفس السعر وللدفاتر نفس السعر) .

17. حقل مستطيل محيطه 2 ط . حيث ط . عدد حقيقي موجب .  
إذا زدنا في طوله 2 م وفي عرضه 16 م ، فإن مساحة هذا المستطيل تزيد بمقدار 264 م<sup>2</sup> .

(1) احسب كلاً من طوله وعرضه بدلالة العدد ط . عين المجموعة التي يجب أن ينتمي إليها ط لكي يكون لهذه المسألة حل .  
(2) من أجل أية قيمة للعدد ط يكون هذا الحقل مربعاً ؟ عين حيثنذ طول ضلع هذا المربع .

18. من أجل تفصيل عدد من الثياب ، اشترت أسرة لفات من القماش بعضه ملون وبعضه موحد اللون . سعر لفة القماش الموحد اللون هو 60٪ من سعر لفة القماش الملون . وثن 15 لفة هو 2280 د.ج .

ما عدد لفات كل نوع إذا كان سعر اللفة الواحدة من القماش وحيد اللون هو 120 د.ج ؟

19. اشترى تاجر صفقة مكونة من 3 قناطر بطاطا و 5 قناطر من الطماطم . ثمن 10 كغ من الطماطم يساوي ثمن 25 كغ من البطاطا . ودفع التاجر من هذه الصفقة 6600 ديناراً . ما هو ثمن الكيلوغرام من البطاطا ، وما ثمن الكيلوغرام من الطماطم ؟

20. في الساعة السابعة صباحاً انطلق قطار من الجزائر العاصمة متوجهاً إلى مدينة الشلف عن طريق البلدية بسرعة 60 كم / سا . وفي نفس الوقت انطلقت سيارة من محطة البلدية متجهة نحو الشلف بسرعة 40 كم / سا . فإذا كانت المسافة بين الجزائر والبلدية هي 42 كم فأوجد متى يلحق القطار السيارة ؟

21. أ ، ب ميناءان بحريان المسافة بينهما 300 كم . قامت باخرة من أ قاصدة ب ، تسير بسرعة متوسطة قدرها 45 كم / سا . وبعد قيامها بثلاث ساعة قامت باخرة أخرى من ب متوجهة نحو أ بسرعة متوسطة قدرها 50 كم / سا . أوجد متى تتلاقى الباخرتان وعلى أي بعد من الميناء ب يكونا ملتقاهما . مثل ذلك بياناً .

22. إناءان فارغان لهما نفس الوزن .

وسعة أحد الإناءين تساوي  $\frac{3}{4}$  سعة الإناء الآخر .

نملأ الإناءين بسائل وزنه الحجمي 0,8 كغ /  $\text{دم}^3$  فيصبح وزناهما مملوءين هما 2,645 كغ و 2,825 كغ على الترتيب .

(1) ما هو وزن كل إناء وهو فارغ .

(2) ما هي سعة كل إناء .



جدول المربعات والجنود التربيعية للأعداد الطبيعية من 1 إلى 100

$\sqrt{\phantom{x}}$	$\phantom{x}^2$	$\phantom{x}$
7,141	2 601	51
7,211	2 704	52
7,280	2 809	53
7,348	2 916	54
7,416	3 025	55
7,483	3 136	56
7,550	3 249	57
7,616	3 364	58
7,681	3 481	59
7,746	3 600	60
7,810	3 721	61
7,874	3 844	62
7,937	3 969	63
8,000	4 096	64
8,062	4 225	65
8,124	4 356	66
8,185	4 489	67
8,246	4 624	68
8,307	4 761	69
8,367	4 900	70
8,426	5 041	71
8,485	5 184	72
8,544	5 329	73
8,602	5 476	74
8,660	5 625	75
8,718	5 776	76
8,775	5 929	77
8,832	6 084	78
8,888	6 241	79
8,944	6 400	80
9,000	6 561	81
9,055	6 724	82
9,110	6 889	83
9,165	7 056	84
9,220	7 225	85
9,274	7 396	86
9,327	7 569	87
9,381	7 744	88
9,434	7 921	89
9,487	8 100	90
9,539	8 281	91
9,592	8 464	92
9,644	8 649	93
9,695	8 836	94
9,747	9 025	95
9,798	9 216	96
9,849	9 409	97
9,899	9 604	98
9,950	9 801	99
10,000	10 000	100

$\sqrt{\phantom{x}}$	$\phantom{x}^2$	$\phantom{x}$
1	1	1
1,414	4	2
1,732	9	3
2,000	16	4
2,236	25	5
2,449	36	6
2,646	49	7
2,828	64	8
3,000	81	9
3,162	100	10
3,317	121	11
3,464	144	12
3,606	169	13
3,742	196	14
3,873	225	15
4,000	256	16
4,123	289	17
4,243	324	18
4,359	361	19
4,472	400	20
4,583	441	21
4,690	484	22
4,796	529	23
4,899	576	24
5,000	625	25
5,099	676	26
5,196	729	27
5,292	784	28
5,385	841	29
5,477	900	30
5,568	961	31
5,657	1 024	32
5,745	1 089	33
5,831	1 156	34
5,916	1 225	35
6,000	1 296	36
6,083	1 369	37
6,164	1 444	38
6,245	1 521	39
6,325	1 600	40
6,403	1 681	41
6,481	1 764	42
6,557	1 849	43
6,633	1 936	44
6,708	2 025	45
6,782	2 116	46
6,856	2 209	47
6,928	2 304	48
7,000	2 401	49
7,071	2 500	50

جدول المربعات والجذور التربيعية للأعداد الطبيعية من 101 إلى 200

√	²	²
12,2882	22 801	151
12,3288	23 104	152
12,3693	23 409	153
12,4097	23 716	154
12,4499	24 025	155
12,4900	24 336	156
12,5300	24 649	157
12,5698	24 964	158
12,6095	25 281	159
12,6491	25 600	160
12,6886	25 921	161
12,7279	26 244	162
12,7671	26 569	163
12,8062	26 896	164
12,8452	27 225	165
12,8841	27 556	166
12,9228	27 889	167
12,9615	28 224	168
13,0000	28 561	169
13,0384	28 900	170
13,0767	29 241	171
13,1149	29 584	172
13,1529	29 929	173
13,1909	30 276	174
13,2288	30 625	175
13,2665	30 976	176
13,3041	31 329	177
13,3417	31 684	178
13,3791	32 041	179
13,4164	32 400	180
13,4536	32 761	181
13,4907	33 124	182
13,5277	33 489	183
13,5647	33 856	184
13,6015	34 225	185
13,6382	34 596	186
13,6748	34 969	187
13,7113	35 344	188
13,7477	35 721	189
13,7840	36 100	190
13,8203	36 481	191
13,8564	36 864	192
13,8924	37 249	193
13,9284	37 636	194
13,9642	38 025	195
14,0000	38 416	196
14,0357	38 809	197
14,0712	39 204	198
14,1067	39 601	199
14,1421	40 000	200

√	²	²
10,0499	10 201	101
10,0995	10 404	102
10,1489	10 609	103
10,1980	10 816	104
10,2470	11 025	105
10,2956	11 236	106
10,3441	11 449	107
10,3923	11 664	108
10,4403	11 881	109
10,4881	12 100	110
10,5357	12 321	111
10,5830	12 544	112
10,6301	12 769	113
10,6771	12 996	114
10,7238	13 225	115
10,7703	13 456	116
10,8167	13 689	117
10,8628	13 924	118
10,9087	14 161	119
10,9545	14 400	120
11,0000	14 641	121
11,0454	14 884	122
11,0905	15 129	123
11,1355	15 376	124
11,1803	15 625	125
11,2250	15 876	126
11,2694	16 129	127
11,3137	16 384	128
11,3578	16 641	129
11,4018	16 900	130
11,4455	17 161	131
11,4891	17 424	132
11,5326	17 689	133
11,5758	17 956	134
11,6190	18 225	135
11,6619	18 496	136
11,7047	18 769	137
11,7473	19 044	138
11,7898	19 321	139
11,8322	19 600	140
11,8743	19 881	141
11,9164	20 164	142
11,9583	20 449	143
12,0000	20 736	144
12,0416	21 025	145
12,0830	21 316	146
12,1244	21 609	147
12,1655	21 904	148
12,2066	22 201	149
12,2474	22 500	150

النسب المثلثية للزوايا درجة فدرجة

الدرجات	جب	تجب	ظل	تظل	
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45
	تجب	جب	تظل	ظل	الدرجات



جدول النسب المثلثية للزوايا غرادا فغرادا

الفرادات	جب	نجب	ظل	تظل	
1	0.0157	0.9999	0.0157	63.6567	99
2	0.0314	0.9995	0.0314	31.8205	98
3	0.0471	0.9989	0.0472	21.2049	97
4	0.0628	0.9980	0.0629	15.8945	96
5	0.0785	0.9969	0.0787	12.7062	95
6	0.0941	0.9956	0.0945	10.5789	94
7	0.1097	0.9940	0.1104	9.0579	93
8	0.1253	0.9921	0.1263	7.9158	92
9	0.1409	0.9900	0.1423	7.0264	91
10	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	90
11	0.1719	0.9851	0.1745	5.7297	89
12	0.1874	0.9823	0.1908	5.2422	88
13	0.2028	0.9792	0.2071	4.8288	87
14	0.2181	0.9759	0.2235	4.4737	86
15	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	85
16	0.2487	0.9686	0.2568	3.8947	84
17	0.2639	0.9646	0.2736	3.6554	83
18	0.2790	0.9603	0.2905	3.4420	82
19	0.2940	0.9558	0.3076	3.2506	81
20	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	80
21	0.3239	0.9461	0.3424	2.9208	79
22	0.3387	0.9409	0.3600	2.7776	78
23	0.3535	0.9354	0.3779	2.6464	77
24	0.3681	0.9298	0.3959	2.5257	76
25	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	75
26	0.3971	0.9178	0.4327	2.3109	74
27	0.4115	0.9114	0.4515	2.2148	73
28	0.4258	0.9048	0.4706	2.1251	72
29	0.4399	0.8980	0.4899	2.0413	71
30	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	70
31	0.4679	0.8838	0.5295	1.8887	69
32	0.4818	0.8763	0.5498	1.8190	68
33	0.4955	0.8686	0.5704	1.7532	67
34	0.5090	0.8607	0.5914	1.6909	66
35	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	65
36	0.5358	0.8443	0.6346	1.5757	64
37	0.5490	0.8358	0.6569	1.5224	63
38	0.5621	0.8271	0.6796	1.4715	62
39	0.5750	0.8181	0.7028	1.4229	61
40	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	60
41	0.6004	0.7997	0.7508	1.3319	59
42	0.6129	0.7902	0.7757	1.2892	58
43	0.6252	0.7804	0.8012	1.2482	57
44	0.6374	0.7705	0.8273	1.2088	56
45	0.6494	0.7604	0.8541	1.1709	55
46	0.6613	0.7501	0.8816	1.1343	54
47	0.6730	0.7396	0.9099	1.0990	53
48	0.6845	0.7290	0.9391	1.0649	52
49	0.6959	0.7181	0.9691	1.0319	51
50	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	50
	نجب	جب	تظل	ظل	الفرادات

## محتوى الكتاب

الدرس	الموضوع	الصفحة
1	مجموعات الأعداد - مراجعة وتمات	3
2	مراجعة في الهندسة .	35
3	المجموعة ح والعمليات فيها .	50
4	الأشعة .	76
5	الجذر التربيعي التام لعدد حقيقي .	95
6	المعالم .	118
7	المعادلات وجمل المعادلات من الدرجة الأولى في ح .	144
8	معادلات المستقيمات في المستوى .	170
9	التناسب - التطبيقان الخطي والتآني .	194
10	الإسقاطات - نظرية طالس .	222
11	المتراجحات وجمل المتراجحات من الدرجة الأولى في ح .	255
12	العلاقات المترية في المثلث القائم . نظرية فيثاغورث .	272
13	مفاهيم أولية في حساب المثلثات .	308
14	تطبيقات أخرى لنظرية فيثاغورث .	333
15	مسائل من الدرجة الأولى .	355



MS - 0902

2004 - 2003

ردمك 6 - 089 - 20 - 9947 I.S.B.N

رقم الإيداع القانوني 659 - 2003 N° Dépôt légal





سعر البيع 107.00 دج